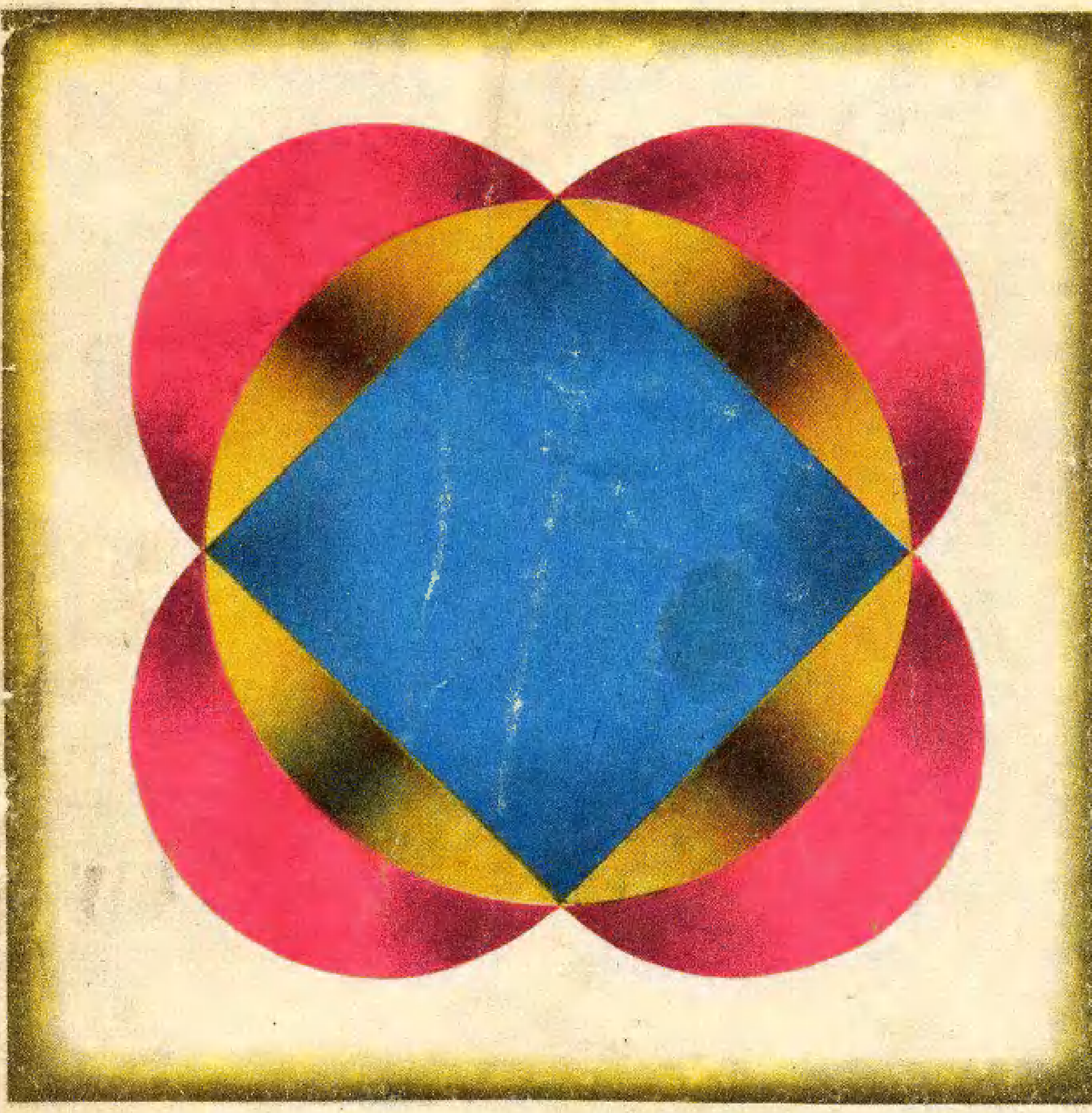
Научно-популярный физико-математический

Квант

5

1971

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



В номере:

ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЕВ

(1821—1894)

Н. Н. Колесников

Пафнутий Львович Чебышев — великий русский математик и механик, родился в дворянской семье в селе Окатово Боровского уезда Калужской губернии. Получив домашнее образование, он в 1837 году поступил в Московский университет, с отличием окончил его в 1841 году, а в 1847 году переехал в Петербург, где в 1849 году защитил докторскую диссертацию.

Еще в 1841 году за работу «Вычисление корней уравнений» по теме, предложенной факультетом в Московском университете, Чебышев награждается серебряной медалью, а его докторская диссертация «Теория сравнений» удостоена специальной премии Петербургской Академии наук.

В 1859 году Пафнутий Львович избирается академиком Петербургской Академии наук.

Научные достижения П. Л. Чебышева нашли широкое признание и были высоко оценены еще при жизни ученого. Он был членом Берлинской и Болонской академий и одним из восьми иностранных членов Парижской Академии наук. Пафнутий Львович был избран членом-корреспондентом Лондонского Королевского общества *), Шведской Академии наук и почетным членом многих других российских и иностранных научных обществ и академий.

П. Л. Чебышев со времени приезда в Петербург начал чтение лекций в Петербургском университете, профессором которого он состоял с 1850 по 1882 год. В 1882 году он вышел в отставку, посвятив себя целиком научной работе в Академии наук. П. Л. Чебышев воспитал большую группу математиков, виднейшими представителями которой были: А. М. Ляпунов, А. А. Марков, В. А. Стеклов, Д. А. Граве, Г. Ф. Вороной, А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев.

*) Так в Англии называется Академия наук, являющаяся одним из старейших научных учреждений мира.

Научные интересы П. Л. Чебышева отличаются большим разнообразием и широтой. Он оставил после себя блестящие исследования в области математического анализа, особенно в теории приближения функций многочленами, в интегральном исчислении, теории чисел, теории вероятностей, геометрии, баллистике, теории механизмов и других областях знаний.

В каждой их этих областей науки Пафнутий Львович получил фундаментальные результаты, выдвинул новые идеи и методы, определившие развитие этих ветвей математики и механики на многие годы и сохранившие свое значение и до сих пор.

При этом поражает способность Чебышева простыми, элементарными средствами получать великолепные научные результаты.

Другой важнейшей особенностью научной деятельности П. Л. Чебышева является неизменный интерес к вопросам практики, стремление связать теоретические проблемы математики с запросами естествознания и техники, практической деятельности людей. В свете современных тенденций развития науки чрезвычайно прозорливой представляется программная установка научной деятельности П. Л. Чебышева: «Практическая деятельность человека представляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных метод. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека: как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды» (П. Л. Чебышев, Сочинения, т. II, Спб., 1907, стр. 239).

Следует отметить, что для самого Пафнутия Львовича интерес к практике оказался чрезвычайно плодотворным, так как многие его математические открытия были сделаны при решении прикладных задач. Так, например, изучение шарнирного механизма, известного под названием «параллелограмм Уатта», привело его к созданию основ теории наилучшего приближения функций многочленами, которая сейчас превратилась в широко развитую математическую область, имеющую большое прикладное значение. По богатству математических идей, значимости полученных результатов и изяществу их получения работа П. Л. Чебышева «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов» (1854 г.) является выдающейся. В этом мемуаре Чебышев ставит и решает знаменитую задачу: *«Дана непрерывная функция $f(x)$; среди всех многочленов $P(x)$ степени n найти такой, чтобы в данном промежутке максимальное значение разности $|f(x) - P(x)|$ было возможно меньшим.»*. Если эта функция сама многочлен степени $n+1$, то поставленная задача равносильна нахождению многочлена такой же степени, с тем же коэффициентом при старшем члене, который возможно меньше уклоняется от нуля на рассматриваемом интервале. Так возникли знаменитые «полиномы Чебышева» — полиномы, «наименее уклоняющиеся от нуля» в промежутке $[-1, +1]$: $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos (n \arccos x)$. (Эти выражения являются многочленами от x степени n. Коэффициенты при старшей степени у этих многочленов равны единице.) Чебышев исследовал также приближение функций посредством рациональных функций и тригонометрических полиномов (Рациональная функция — это отношение двух многочленов, а тригонометрический полином — это многочлен от $\sin x$ и $\cos x$.)

В теории вероятностей Чебышеву удалось необычайно простыми средствами получить ряд весьма важных результатов. Многие результаты и выводы были только намечены, не доведены до конца, но все работы Чебышева в этой области явились той базой, на которой развилась русская школа теории вероятностей. Строгие доказательства многих теорем, намеченные Чебышевым, и дальнейшее их развитие было проведено его учениками, академиками А. М. Ляпуновым и А. А. Марковым.

Выдающееся значение для науки имели исследования П. Л. Чебышева в теории чисел. Впервые после Евклида удивительно остроумными и удивительно элементарными рассуждениями он получил важнейшие результаты в задаче о распределении простых чисел в работах «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» и «О простых числах». П. Л. Чебышев доказал, что функция $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x — удовлетворяет неравенству

$$0{,}92 < \frac{\pi(x) \ln x}{x} < 1{,}06 \text{ *)}$$

при достаточно больших x. Это неравенство затем было несколько уточнено английским математиком Сильвестром, а французским математиком Адамаром было строго доказано, что

$$\lim_{x \to \infty} \left[\pi(x) : \frac{x}{\ln x} \right] = 1$$

или асимптотически $\pi(x) \sim x/\ln x$.

Здесь же Чебышев доказал утверждение (так называемый постулат Бертрана), состящее в том, что между x и $2x (x \geqslant 2)$ всегда найдется хотя бы одно простое число **).

Классические результаты были получены Чебышевым и в области математического анализа.

Одной из наук, которой Пафнутий Львович интересовался всю жизнь, была теория механизмов и машин, причем Чебышев занимался не только теоретическими изысканиями в этой области, но и уделял большое внимание непосредственному конструированию конкретных механизмов.

Задолго до того, как советский «Луноход-1» проложил первую трассу на лунной поверхности, фантасты и ученые рассматривали различные варианты машин, которым будет суждено передвигаться по другим планетам. Большинство проектов сводилось к некоторому шагающему механизму. П. Л. Чебышев разработал вариант стопоходящей машины, имитирующей движение животного при ходьбе.

Огромное влияние П. Л. Чебышева на развитие математики в нашей стране не ограничивается его личными достижениями. Его работы, исключительно богатые новыми идеями и методами, дали мощный толчок к развитию многих ветвей математики и механики; кроме того, он лично ставил важные задачи и проблемы перед молодыми учеными. По его непосредственному совету А. М. Ляпунов начал исследования по теории фигур равновесия вращающейся жидкости, где и получил классические результаты, имеющие первостепенное значение для механики и космогонии.

Великий математик и механик П. Л. Чебышев был передовым человеком своего времени. Так, например, вместе с двумя другими академиками-математиками — В. Г. Имшенецким и В. Я. Буняковским — он предложил физико-математическому отделению Петербургской Академии избрать членом-корреспондентом Академии замечательную русскую женщину — Софью Васильевну Ковалевскую *).

Много внимания уделял Чебышев вопросам народного образования, принимая активное участие в Ученом комитете Министерства просвещения.

Труды ученого, его научная, педагогическая и просветительская деятельность, основанная им знаменитая Петербургская математическая школа сыграли исключительно большую роль в развитии отечественной математики и механики. В 1944 году Академия наук СССР учредила премии имени П. Л. Чебышева за лучшие исследования в области математики и теории механизмов и машин.

*) $\ln x$ — логарифм числа x по основанию e, где $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

**) О методе, с помощью которого Чебышев получил свои замечательные результаты, см. на стр. 4—7.

*) С. В. Ковалевская была избрана 7 ноября 1889 года.

О ПОСТУЛАТЕ БЕРТРАНА

М. И. Башмаков

Среди 69 работ Пафнутия Львовича Чебышева две работы сыграли особенно важную роль в развитии теории чисел. Эти работы: «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» и «О простых числах», написанные им в молодые годы, посвящены труднейшему в теории чисел вопросу о распределении простых чисел.

Во второй из названных работ указаны неравенства, позволяющие достаточно точно оценить количество простых чисел в данном отрезке натурального ряда и, в частности, доказан такой факт: между x и $2x$ (где $x>1$) всегда есть хотя бы одно простое число. Это утверждение высказал известный французский математик Бертран, который проверил его в пределах имевшихся таблиц простых чисел, но доказать не сумел и принял в качестве постулата.

Мы проследим основные идеи Чебышева, приведшие его к этим оценкам, а затем предложим ряд задач, решение которых позволит читателям (достаточно хорошо знакомым со свойствами логарифмов) восстановить чебышевское доказательство постулата Бертрана и получить неравенства для количества простых чисел, не превосходящих заданной величины.

Читатель может удивиться, какое отношение имеют логарифмы к простым числам? В том-то и состоит заслуга Чебышева, что он указал, как можно использовать обычные функции анализа — корни, логарифмы — при изучении задач о целых числах. Если мы хотим обнаружить, есть ли хотя бы одно простое число на отрезке от n до $2n$, то можно поступить следующим образом:

1) придумать какую-нибудь функцию $y=f(x)$ вещественного аргумента x, которая не меняла бы своего значения, пока x пробегает отрезок между соседними простыми числами, и принимала бы большее значение при переходе через простое число;

2) доказать неравенства относительно функции f, которые помогли бы достаточно точно оценить скорость ее роста.

Для так подобранной функции разность $f(2n)-f(n)$ будет положительным числом в том и только том случае, если функция f возросла при переходе от n к $2n$, то есть если между n и $2n$ имеется хотя бы одно простое число.

Первому условию удовлетворить легко. Можно рассмотреть такую функцию: обозначим через $\pi(x)$ число простых чисел, не превосходящих x.

Например, $\pi(1)=0$ (единица не считается простым числом), $\pi(3)=2$, $\pi(9)=4$, $\pi(9{,}5)=4$, $\pi(10{,}9)=4$, $\pi(11)=5$ и т. д.

Конечно, если бы мы могли доказать, что

$$\pi(2x)-\pi(x)>0,$$

мы и доказали бы постулат Бертрана, так как

$$\pi(2x)-\pi(x)$$

как раз и обозначает число простых чисел, заключенных между x и $2x$

Однако дать точные оценки для $\pi(x)$ нелегко, и Чебышев для решения этой задачи предложил рассмотреть функцию, которая при переходе через простое число возрастала бы не на единицу, как $\pi(x)$, а более ощутимо. Он исследовал функцию

$$\theta(x) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \ldots = \sum_{p \le x} \log p \quad (\theta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 2)$$

— сумму логарифмов всех простых чисел, не превосходящих x (или, что то же самое, логарифм произведения простых чисел, не превосходящих x). Тогда, как это очевидно из предыдущего, постулат Бертрана эквивалентен следующему неравенству:

$$\theta(2x) - \theta(x) > 0. \qquad (1)$$

Для оценки функции $\theta(x)$ и доказательства (1) Чебышев использовал вспомогательную функцию $T(x)$:

$$T(x) = \log 2 + \log 3 + \ldots = \sum_{n \le x} \log n.$$

Функция $T(x)$ есть логарифм произведения всех целых чисел, не превосходящих x. Чебышев показал, что функции $\theta(x)$ и $T(x)$ связаны между собой следующим замечательным тождеством:

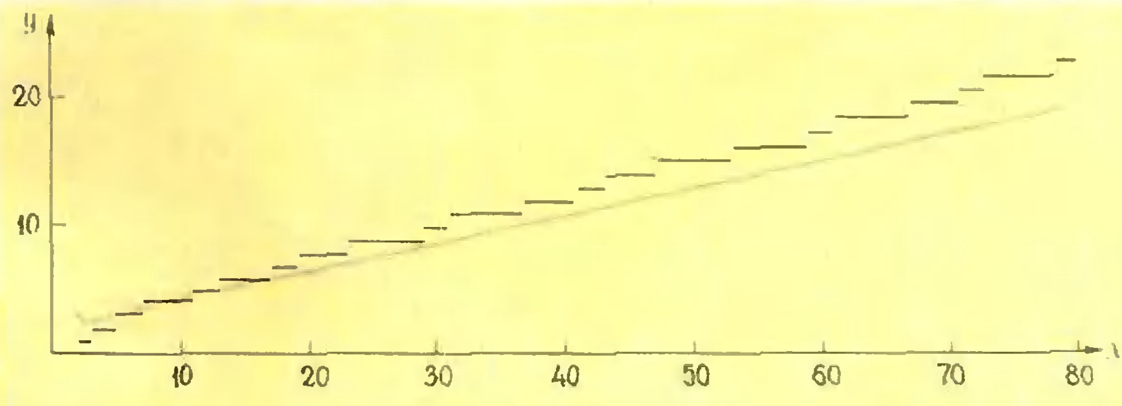
$$T(x) = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \ldots + \theta\left(\frac{x}{2}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right) + \ldots + \theta\left(\frac{x}{3}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\right) + \ldots + \theta\left(\frac{x}{4}\right) + \theta\left(\sqrt{\frac{x}{4}}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{4}}\right) + \ldots \qquad (2)$$

где суммирование обрывается тогда, когда аргумент $\sqrt[k]{x/m}$ становится меньше двух, а значение $\theta(\sqrt[k]{x/m})$ становится нулем. Функция T известна со времен Эйлера и еще задолго до Чебышева были доказаны неравенства, позволяющие довольно точно оценить порядок роста T.

Из этих неравенств Чебышев получает неравенства для $\theta(x)$ вида

$$Ax + v_1(x) < \theta(x) < \frac{6}{5}Ax + v_2(x), \qquad (3)$$

где A — некоторая постоянная, а дополнительные члены $v_1(x)$ и $v_2(x)$ при больших x значительно меньше x. Этого уже достаточно, чтобы при x, бóльших некоторого x_0, доказать неравенство $\theta(2x) - \theta(x) > 0$ (у Чебы-



На этом рисунке черные ступеньки изображают график функции $y = \pi(x)$, выражающей количество простых чисел, не превосходящих x. Эта функция ведет себя очень нерегулярно; например, можно доказать, что на ее графике встречаются сколь угодно длинные ступеньки. Чебышев впервые получил оценки для этой функции, характеризующие порядок ее роста. Он доказал, что отношение $\pi(x)$ к $x/\log_e x$ (где $e = 2{,}718\ldots$; график функции $y = x/\log_e x$, при $x > 1$, изображен на том же рисунке красной линией) близко к единице при всех достаточно больших x; он доказал также, что черная и красная линии пересекаются бесконечное число раз.

шева $x_0 = 160$) Для x, меньших x_0, справедливость постулата Бертрана устанавливается прямой проверкой.

Дальнейшее развитие чебышевских идей привело к такому результату: для $x \geqslant 48$ $\theta\left(\frac{9}{8}x\right) - \theta(x) > 0$, то есть, начиная с указанного места, между x и $\frac{9}{8}x$ всегда есть хотя бы одно простое число.

Вы можете более детально проследить за ходом рассуждений Чебышева, решая следующие ниже задачи 1—5.

Для того чтобы $T(x)$ выразить через $\theta(x)$, удобно ввести еще одну вспомогательную функцию. Пусть p^{a_p} — наивысшая степень p, не превосходящая x. Определим функцию ψ так:

$$\psi(x) = a_2 \log 2 + a_3 \log 3 + a_5 \log 5 + \ldots = \sum_{p \leq x} a_p \log p.$$

Ясно, что $\psi(x)$ есть логарифм наименьшего общего кратного для всех целых чисел, не превосходящих x. T легко выражается через ψ.

Задача 1. Доказать, что

$$T(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots$$

Теперь надо связать функции ψ и θ.

Задача 2. Доказать, что

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \theta(\sqrt[4]{x}) + \ldots$$

Решив задачи 1 и 2, вы установите тождество (2). Оценим теперь $T(x)$.

Задача 3. Докажите, что существует такое вещественное число e, что при всех натуральных n

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

Для решения этой задачи полезно показать, что каждое из чисел

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

меньше каждого из чисел

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1};$$

отсюда следует, что существует такое число e, которое больше всех a_n и меньше всех b_n. Это и есть то число, которое мы ищем (о некоторых его свойствах рассказывалось на последней странице нашего журнала № 1, 1971).

Решив эту задачу, вы получите такие неравенства для $T(x)$ *):

$$(x-1)(\log x - 1) < T(x) < (x+1)\log x - x \quad (4)$$

Сам Чебышев пользовался более точными неравенствами.

Из оценки для $T(x)$ Чебышев получает оценки для $\psi(x)$, а затем и для $\theta(x)$.

Чтобы выразить ψ через T, Чебышев замечает следующее. Рассмотрим сумму

$$S = T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{30}\right).$$

Воспользуемся результатом задачи 1 и приведем эту сумму к такому виду

$$S = A_1\psi(x) + A_2\psi\left(\frac{x}{2}\right) + A_3\psi\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots$$

Задача 4. Проверьте, что коэффициенты $A_1, A_2, A_3, \ldots$ меняются с периодом 30 и что для первых тридцати значений n коэффициенты A_n составляют следующую последовательность: 1, 0, 0, 0, 0, −1, 1, 0, 0, −1, 1, −1, 1, 0, −1, 0, 1, −1, 1, −1, 0, 0, 1, −1, 0, 0, 0, 0, 1, −1.

Отсюда видно, что сумма S записывается знакопеременным рядом $S = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \ldots$

Так как ψ неубывающая функция, то

$$S = \psi(x) - \left(\psi\left(\frac{x}{6}\right) - \psi\left(\frac{x}{7}\right)\right) - \left(\psi\left(\frac{x}{10}\right) - \psi\left(\frac{x}{11}\right)\right) \ldots \leqslant \psi(x). \quad (5)$$

Аналогично

$$S = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right)\right) + \ldots \geqslant \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right). \quad (6)$$

Из (2) сразу получается неравенство для ψ, которое оценивает ее снизу, так как мы знаем неравенства для T и получили оценку для ψ через S, то есть комбинацию значений T. Эта оценка будет иметь такой вид: $\psi(x) \geqslant A_1(x) + \omega_1(x)$, где ω_1 растет медленнее, чем x, то есть $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\omega_1(x)}{x} = 0$.

Для получения оценки сверху надо освободиться еще от $\psi\left(\frac{x}{6}\right)$. Применяя неравенство (6) к $\frac{x}{6}$, $\frac{x}{6^2}$, $\frac{x}{6^3}$ и т. д. и скла-

*) В этой формуле логарифмы берутся по основанию e — это так называемые натуральные логарифмы.

дывая их найдем нера енство для $\psi(x)$ типа $\psi(x) \leqslant A_2 x + \omega_2(x)$ где ω_2 растет медленнее чем x.

Задача 5 Докажите, что

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leqslant \theta(x) \leqslant \leqslant \psi(x) - \psi(\sqrt{x})$$

Отсюда уже получаются нужные оценки (3)

Из результатов Чебышева не только вытекала справедливость постулата Бертрана, но, что еще более важно, из них получались неравенства, позволяющие хорошо оценить функцию $\pi(x)$:

$$c_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\log x},$$

где c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные *). Вы сможете доказать такие неравенства, решив следующую задачу.

Задача 6. Докажите, что

$$\frac{\psi(x)}{\log x} < \pi(x) < \frac{\psi(x) + \theta(x)}{\log x}.$$

Несколько иные доказательства постулата Бертрана и неравенств для $\pi(x)$ можно прочесть в книгах [2] и [3]. В них вместо $n!$ оценивается $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (см. решение задачи М23, «Квант» № 2, 1971, стр. 27).

Литература

1. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, 1947.
2. Э. Трост. Простые числа. Физматгиз, 1959.
3. И. М. Яглом, А. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М., 1954, раздел II, п. 14.

*) Логарифм здесь можно брать по любому основанию a, большему единицы; от a зависят только значения постоянных c_1 и c_2, поскольку $\log_b x$ получается из $\log_a x$ умножением на постоянное число $\log_a b$. Более естественно использовать натуральный логарифм, потому что именно функция $x/\log_e x$ эквивалентна $\pi(x)$ при больших x, то есть $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log_e x} = 1$. Это было доказано уже значительно позже, а из работы самого Чебышева следовало только, что отношение $\pi(x)$ к $x/\log_l x$ заключено между 0,921 и 1,106 и что если предел при $x \to \infty$ существует, то он равен единице.

КОЛЬКО ВОПРОСОВ

Коля и Ося играют в такую игру Ося задумывает несколько чисел, а Коля их отгадывает При этом ему разрешается задавать Осе только «арифметические» вопросы: например он спрашивает, чему равно произведение всех этих чисел или сумма кубов, и т. д.

Ответом на каждый такой вопрос является некоторое число По этим числам — ответам Коля отгадывает задуманные Осей числа, причем он может отгадывать их не по одному, а сразу группами. Например, он задает два вопроса и по полученным ответам отгадывает три из загаданных чисел.

Вопросы могут быть и более сложными: Коля может попросить Осю, чтобы он ответил, какое получится число, если перемножить первые два задуманных числа, сложить полученный результат с третьим числом, потом возвести полученное число в степень, равную четвертому числу, и т. д. При этом нужно помнить, что Коля не знает, сколько именно чисел задумал Ося.

Какое минимальное количество вопросов должен задать Коля, если он знает, что Ося задумал натуральные числа?

Сколько понадобится вопросов, если Ося задумывает целые числа обоих знаков?

ГРАФИКИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Р. Г. МИНЦ

Как выяснить, ограничено ли движение тела и в каких пределах? Существуют ли положения равновесия, и если да, то какие они — устойчивые или неустойчивые?

В этой статье мы покажем, что на подобные вопросы очень легко ответить, если известна потенциальная энергия тела. Мы обсудим, когда имеет смысл говорить о потенциальной энергии и как вычислить ее величину в каждой точке

Раз речь зашла о потенциальной энергии, значит, мы хотим изучать движение тел, точнее говоря, материальных точек *), исходя из закона сохранения механической энергии.

Этот закон утверждает, что для замкнутой системы материальных точек (тел) сохраняется величина

$$E=T+U. \qquad (1)$$

Сумма

$$T=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}+\ldots+\frac{m_nv_n^2}{2}$$

называется кинетической энергией системы, а U — потенциальной энергией взаимодействия тел. Кинетическая энергия в формуле (1) отражает собственно движение тел, а потенциальная энергия, которая зависит от расстояний между телами, их взаимное влияние друг на друга.

В дальнейшем, для простоты, мы будем рассматривать движение лишь одной из материальных точек *), предполагая, что все остальные покоятся. В таких случаях обычно говорят о движении частицы во внешнем силовом поле, а формула (1) принимает вид

$$E=\frac{mv^2}{2}+U. \qquad (2)$$

Говоря о движении частицы во внешнем поле, мы рассматриваем влияние неподвижных частиц на движущиеся, причем вся система частиц как целое является замкнутой. В этом, однако, содержится некая тонкость. Проследим ее внимательно на примере двух материальных точек с массами m и M. Пусть частица массы M в некоторый момент покоилась. Выясним, при каком условии она и дальше остается неподвижной, то есть можно будет говорить о движении частицы массы m во внешнем поле. Воспользуемся законом сохранения количества движе-

*) Как обычно, под материальной точкой мы подразумеваем тело, собственные размеры которого в данной задаче пренебрежимо малы.

*) Задача о движении большого числа взаимодействующих между собой тел чрезвычайно сложна. До сих пор удалось в общем виде решить лишь задачу о двух телах.

ния (ведь наша система тел замкнутая): $M\vec{v}+m\vec{v}_1=m\vec{v}_0$. (Здесь $\vec{v}_0$ — начальная скорость частицы с массой m, $\vec{v}_1$ — ее скорость через некоторое время и $\vec{v}$ — скорость, приобретаемая частицей с массой M.)

Отсюда $\vec{v}=\frac{m}{M}(\vec{v}_0-\vec{v}_1)$. Если $\vec{v}_1\neq\vec{v}_0$, то $\vec{v}=0$ только при $M\to\infty$. Физически это означает, что $m\ll M$. Таким образом, внешнее поле — результат действия тяжелых неподвижных частиц на легкую. Напомним два типичных примера внешнего поля: спутник в поле притяжения Земли, электрон в поле ядра. В каждом из этих примеров, конечно же, выполняется условие $m\ll M$.

Если полная энергия E частицы задана, то соотношение (2) накладывает ограничения на то, в какой области пространства может находиться частица. Действительно, ведь кинетическая энергия $E_{\text{кин}}=\frac{mv^2}{2}$ положительна (если бы она была отрицательной, то скорость частицы $v=\sqrt{\frac{2}{m}E_{\text{кин}}}$ должна была бы быть мнимой!), а из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2}=E-U.$$

Таким образом, $E\geqslant U$; мы получили критерий для определения области, в которой возможно движение с полной энергией E. В точках, где $E=U$, кинетическая энергия, а значит и скорость, обращается в нуль.

Рассмотрим в качестве примера движение тела вдоль прямой (ось x). Тогда потенциальная энергия зависит лишь от положения на этой прямой: $U=U(x)$. В этом случае наш критерий очень удобно применять графически. Проведем на графике потенциальной энергии горизонтальную прямую $U(x)=E$. Всюду, где график потенциальной энергии проходит ниже прямой, $E>U$ и движение возможно. В точках пересечения скорость

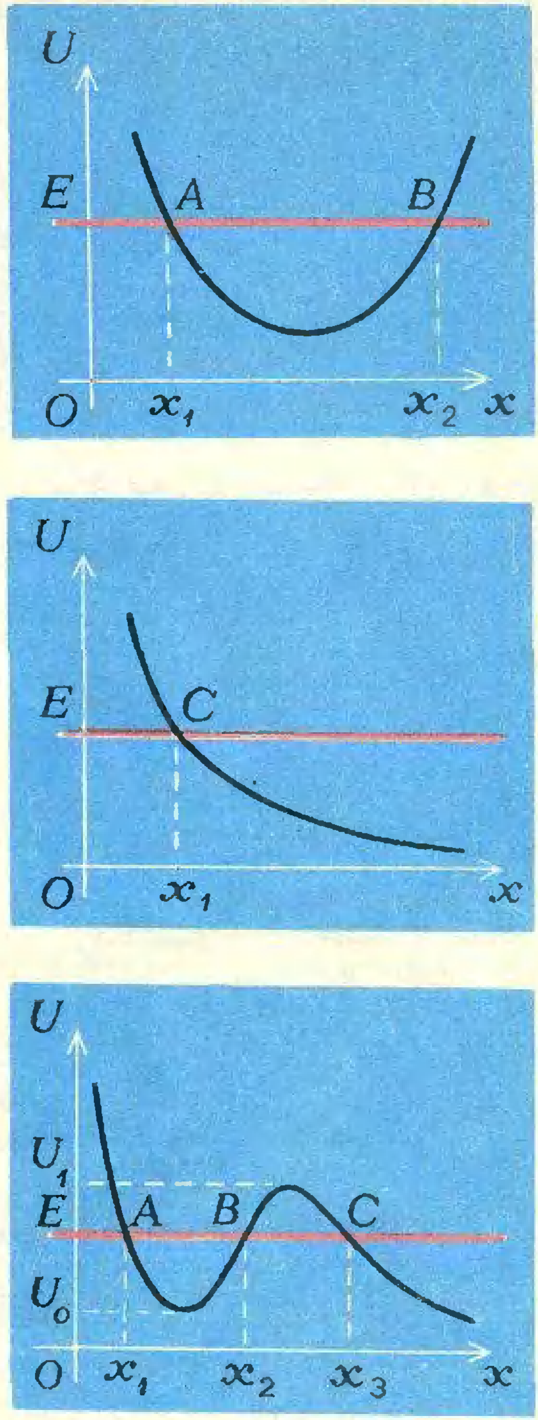


Рис. 1. а) Движение возможно в области $x_1\leqslant x\leqslant x_2$. б) Движение возможно в области $x\geqslant x_1$. в) Движение возможно в областях $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ и $x\geqslant x_3$.

обращается в нуль (здесь $E=U$), а в других областях движение невозможно. На рисунке 1 приведены примеры зависимости потенциальной энергии от координаты и показано, в каких областях может двигаться тело.

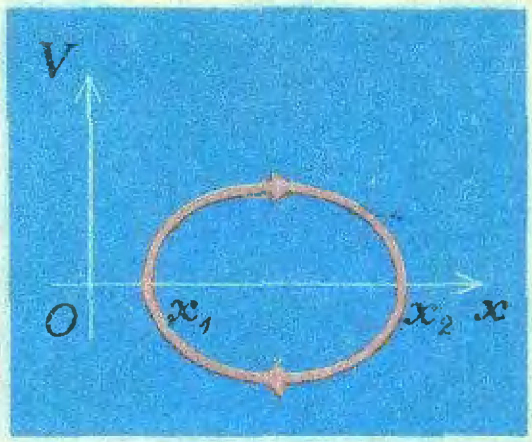


Рис. 2. Тело, двигаясь влево, подходит к точке x_1, где его скорость равна нулю. Однако остаться в этой точке оно не может, так как на него действует сила (см. правило санок на стр. 12). Поэтому дальше тело будет двигаться вправо, увеличивая скорость.

Зная потенциальную энергию, легко определить скорость частицы в каждой точке. Так как $\frac{mv^2}{2} = E - U$, то

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}.$$

Два знака скорости соответствуют двум возможным направлениям движения вдоль оси x. На рисунке 2 графически показана зависимость скорости частицы от ее положения для случая, когда энергия и потенциальная энергия соответствуют рисунку 1а. Направление движения обозначено на графике стрелкой.

Итак, мы видим, что с помощью графиков потенциальной энергии можно просто и наглядно выяснить, где возможно движение, какой вид имеют траектории и как зависит скорость тела от его положения. При выяснении этих вопросов нам нужно было знать поведение потенциальной энергии как функции координат «в целом», то есть как она ведет себя на всей траектории.

Давайте теперь посмотрим, с чем связана скорость изменения потенциальной энергии, то есть величина

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{U(x_2) - U(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad (3)$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$ очень мало. По закону сохранения механической энергии

$$\Delta U = U(x_2) - U(x_1) = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m}{2}(v_1 + v_2)(v_1 - v_2) \quad (4)$$

где v_1 — скорость тела в точке x_1, а v_2 — его скорость в точке x_2. На малом участке Δx действующую на тело силу можно считать постоянной. Движение под действием постоянной силы, которую обозначим F, равноускоренное, а ускорение $a = F/m$. В таком случае $v_2 - v_1 = a\Delta t = \frac{F}{m}\Delta t$ (Δt — время движения), а $\frac{v_1 + v_2}{2}$ равно средней скорости $\frac{v_1 + v_2}{2} = v_{ср} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Подставим эти выражения в формулу (4):

$$\Delta U = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\left(-\frac{F}{m}\Delta t\right) = -F\Delta x.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = -F. \quad (5)$$

Формулу (5) можно получить и иначе, учитывая, что при равномерном движении меняется лишь потенциальная энергия тела и изменение ее равно работе силы, действующей на тело.

Выясним геометрический смысл формулы (5). Пусть нам задан график потенциальной энергии. Ясно, что чем меньше величина $x_2 - x_1$, тем точнее скорость изменения потенциальной энергии совпадает с тангенсом угла наклона касательной к кривой потенциальной энергии (рис. 3). Действи-

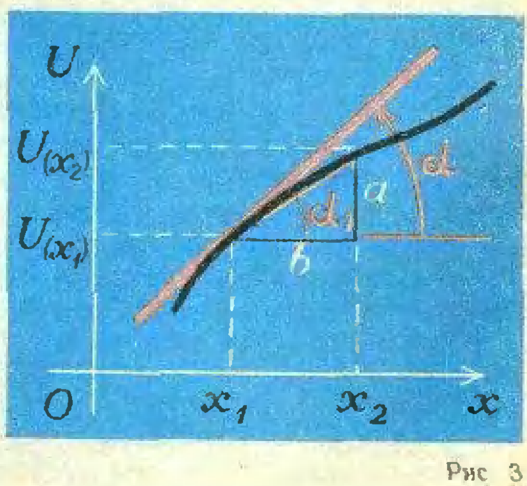


Рис. 3

тельно, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a}{b} = \frac{U(x_2) - U(x_1)}{x_2 - x_1}$, а чем меньше $x_2 - x_1$, тем с большей точностью угол α_1 равен углу α. Таким образом, мы приходим к выводу, что тангенс угла наклона касательной к графику потенциальной энергии, взятый с обратным знаком, совпадает с действующей на тело силой. Это значит, что чем круче растет потенциальная энергия, тем больше величина силы и наоборот.

После того как формула (5) приобрела наглядный геометрический смысл, легко, например, выяснить, существуют ли положения равновесия и какие они. Положением равновесия мы называем точку, в которой тело может пребывать сколь угодно долго, если, конечно, вначале оно обладает нулевой скоростью. Когда это возможно? Изменение скорости характеризуется ускорением: если оно равно нулю, то скорость тела неизменна. Ускорение же пропорционально действующей на тело силе. Значит, положения равновесия — это те точки, где сила обращается в нуль.

Обратимся снова к графику потенциальной энергии. Как мы уже видели, сила, действующая на тело, равна взятому с обратным знаком тангенсу угла наклона касательной к кривой потенциальной энергии. Если этот угол равен нулю, то равна нулю и сила. Таким образом, на графике потенциальной энергии положения равновесия соответствуют тем точкам, в которых касательная параллельна оси абсцисс. Очевидно, например, что положениями равновесия являются максимумы и минимумы потенциальной энергии (рис. 4).

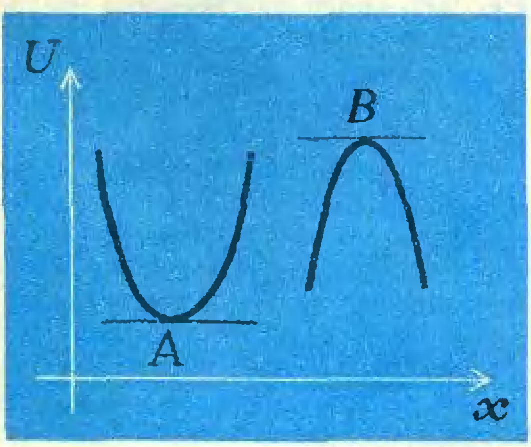
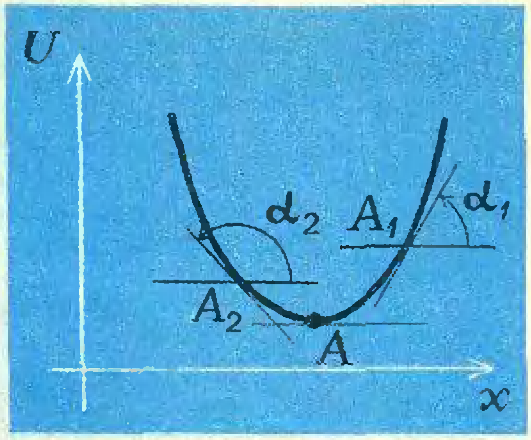


Рис. 4



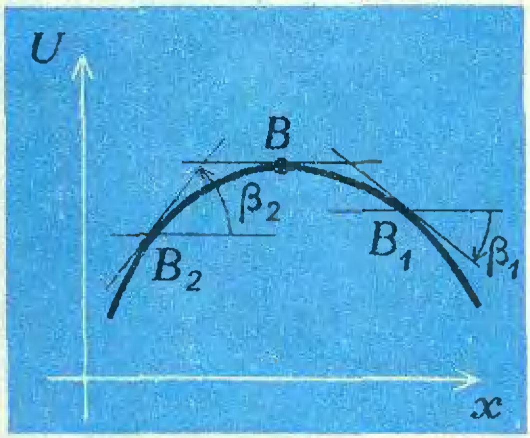


Рис. 5а,б

Положения равновесия могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Что имеется в виду? Пусть мы слегка отклонили тело от положения равновесия. Если при этом сила, действующая на тело, возвращает его обратно, то равновесие называется устойчивым, если нет, то неустойчивым.

Исследуем на устойчивость положение равновесия, соответствующее минимуму на кривой потенциальной энергии (точка A на рис. 4). Пусть тело сдвинулось от точки A вправо. В новом положении A_1 (рис. 5 а) тангенс угла наклона касательной положителен, а сила отрицательна, то есть направлена в противоположную смещению сторону и возвращает тело к точке A. Если слегка сдвинуться влево от точки A, то в таком положении (A_2 на рис. 5 *а*) тангенс угла наклона касательной отрицательный, сила положительна, то есть направлена к точке A и заставляет тело вернуться в исходное положение. Таким образом, положение равновесия в минимуме потенциальной энергии является устойчивым. Аналогично можно рассмотреть устойчивость положения равновесия, если потенциальная энергия максимальна (рис. 5 *б*).

Итак, мы видим, что по кривой потенциальной энергии можно найти величину действующей на тело силы, легко определить, где находятся положения равновесия и какие они. В этом смысле график потенциальной энергии можно сравнить с ледяной горкой, откуда спускаются на санках. В тех местах, где горка крутая, санки разгоняются быстрее, на пологом спуске — медленнее. Вершина горки и углубления в ней — положения равновесия. Ведь если поставить туда санки, они там и останутся. При этом вершина — положение неустойчивого равновесия, а ложбинки — устойчивого.

Теперь, пожалуй, пора поговорить о том, как вычислить величину потенциальной энергии. Для этого вернемся снова к формуле (5) и перепишем ее в виде

$$U(x_2) - U(x_1) = -F \cdot (x_2 - x_1). \quad (6)$$

Напомним, что длина $\Delta x = x_2 - x_1$

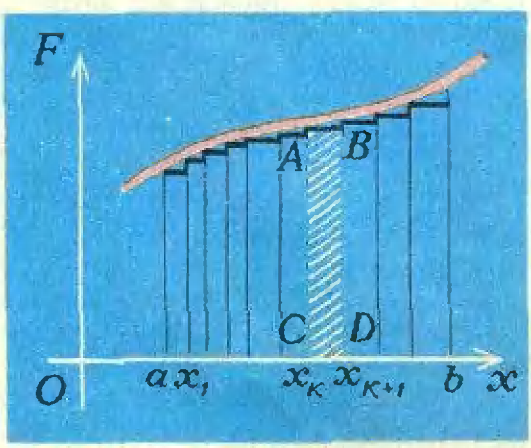


Рис. 6

выбрана здесь столь малой, что силу F можно считать постоянной на всем участке Δx. Величина $F \cdot (x_2 - x_1)$ равна работе силы F на пути из точки x_1 в точку x_2. Следовательно, разность потенциальных энергий равна работе силы, взятой с обратным знаком. Последнее утверждение справедливо при любом расстоянии между соответствующими точками. Чтобы доказать это, разобьем путь из точки a в точку b на n маленьких участков таких, что на каждом из них справедлива формула (6). Обозначим работу силы F на пути из точки x_k в точку x_{k+1} ($k = 1, 2, \ldots, n$) так:

$$F \cdot (x_{k+1} - x_k) = A_{k+1}.$$

Применяя формулу (6) к каждому из участков пути, найдем, что:

$$U(x_1) - U(a) = -A_1,$$
$$U(x_2) - U(x_1) = -A_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U(b) - U(x_{n-1}) = -A_n.$$

Сложив эти равенства почленно, получим:

$$U(b) - U(a) = -(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = A, \quad (7)$$

где A — работа силы F на пути из a в b.

Формула (7) приобретает наглядный геометрический смысл, если обратиться к графику зависимости силы от координаты $F = F(x)$ (рис. 6). Суть доказательства, которое мы только что провели, заключается в том, что истинную зависимость силы от координаты мы заменили ступенчатой, так как на каждом участке сила предполагалась постоянной. Ясно, что если число ступенек сделать очень большим, то обе кривые — черная и красная — фактически совпадут.

Обратим теперь внимание на то, что площадь любого прямоугольника на рисунке 6 равна работе силы F на соответствующем участке пути, а сумма площадей всех таких прямоугольников равна работе на пути из a в b; но площадь под ступенчатым графиком силы равна площади под истинным графиком силы. Это означает, что разность потенциальных энергий тела равна взятой с обратным знаком *) площади под графиком зависимости действующей на тело силы от координаты.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть сила, действующая на тело, постоянна, то есть не зависит от координат **). Тогда ее график — прямая, параллельная оси абсцисс. Площадь под ней равна $F \cdot (x - x_0)$, откуда для разности потенциальных энергий получаем

$$U(x) - U(x_0) = -F \cdot (x - x_0) \quad (8)$$

(рис. 7 *а,б*).

С помощью соотношения (8) получаем

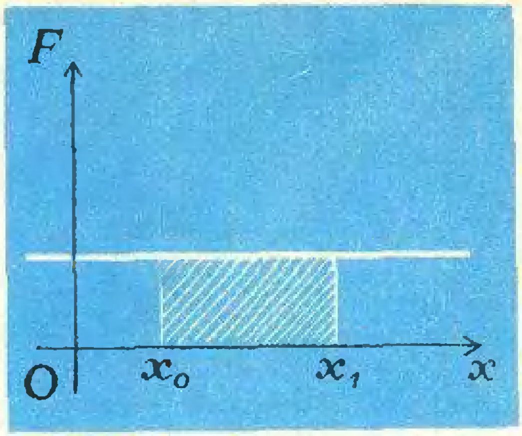
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F \cdot (x - x_0),$$

$$\frac{mv^2}{2} - Fx = \frac{mv_0^2}{2} - Fx_0,$$

то есть потенциальная энергия $U = -Fx$. Однако это не единственная возможность, с тем же основанием мы могли бы написать и такое равенство

$$\frac{mv^2}{2} - Fx + C = \frac{mv_0^2}{2} - Fx_0 + C,$$

где C — постоянное число. Но тогда потенциальная энергия $U = -Fx + C$. Таким образом, мы видим, что потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной. Это обстоятельство следует уже из самого закона сохранения механической энергии. Ведь если мы говорим, что сохраняется величина $E = \frac{mv^2}{2} + U$, то сохраняется и $E' = \frac{mv^2}{2} + U + C$, где C — некоторая постоянная. Но в таком случае $U' = U + C$. Это означает, что потенциальную энергию можно определить лишь с точностью до произвольной постоянной, которую всегда выбирают из соображений удобства *). Конечно же, такая неопределенность потенциальной энергии никак не сказывается на сделанных нами выводах о характере движения в данном поле, о наличии в нем положений равновесия и на зависимости скорости тела от координаты. В этом вы легко можете убедиться, надо только одновременно с изменением потенциальной энергии на величину C изменить и полную энергию тела на такую же величину. Дело в том, что для полного описания движения тела надо задать его положение и скорость в некоторый момент



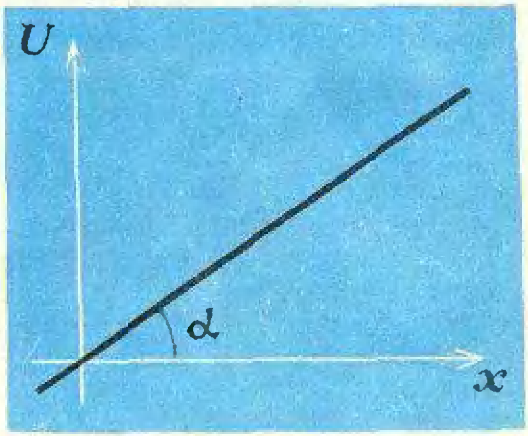


Рис. 7*а,б*

*) Надо отметить, что если сила отрицательна, то соответствующему участку площади следует приписать знак минус.

**) Поле, в котором сила, действующая на тело, всюду постоянна, называется однородным. Однородными, например, являются поле тяготения вблизи поверхности Земли $F = mg$ и электрическое поле внутри плоского конденсатора.

*) Так, например, в случае однородного поля постоянную, как правило, полагают равной нулю, то есть считают, что потенциальная энергия равна нулю в начале координат (см. рис. 7 *б*). Вспомните, что именно так вы обычно поступаете, решая задачи о движении тел вблизи поверхности Земли.

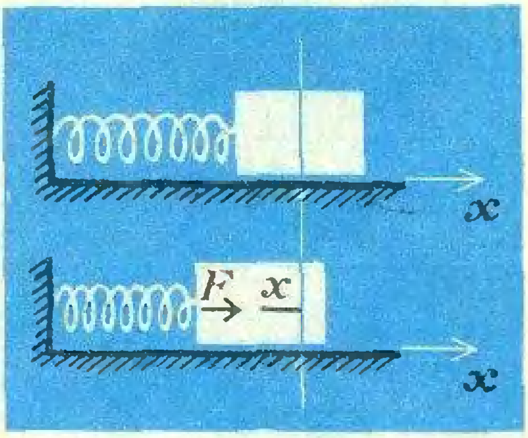


Рис. 8

времени, тем самым мы будем знать $\frac{mv_0^2}{2}$ и $U(x_0)$. Полная же энергия $E=\frac{mv_0^2}{2}+U(x_0)$. Поэтому при добавлении к U некоторой постоянной величины, энергия E увеличивается ровно на столько же.

Рассмотрим теперь движение кубика на пружинке в отсутствие трения (рис. 8) и вычислим, чему равна потенциальная энергия в этом случае. По закону Гука сила, действующая на кубик, равна $F=-kx$, где k — жесткость пружины, x — ее деформация. В таком случае график силы — прямая, тангенс угла наклона которой к оси x равен k (рис. 9а).

Разность потенциальных энергии $U(x_1)-U(x_0)$ равна площади заштрихованной на рис. 9 а трапеции $ABCD$, высота которой $BC=x_1-x_0$, а полусумма оснований $\frac{AB+CD}{2}=\frac{kx_0+kx_1}{2}$. Воспользовавшись формулой площади трапеции, находим, что

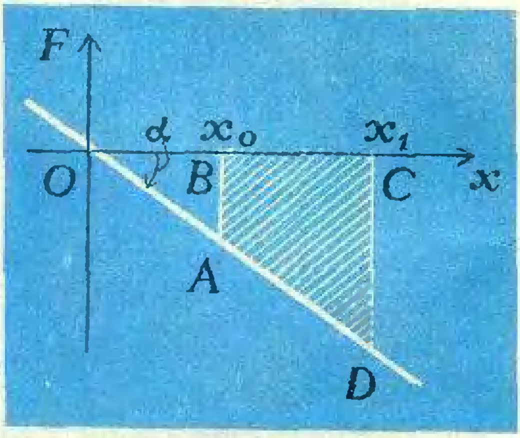
$$U(x_1)-U(x_0)=\frac{(x_1-x_0)(kx_0+kx_1)}{2}=$$
$$=\frac{k(x_1^2-x_0^2)}{2}=\frac{kx_1^2}{2}-\frac{kx_0^2}{2}. \qquad (9)$$

В результате для $U(x)$ получаем следующее выражение: $U(x)=\frac{kx^2}{2}$ *)

*) Аналогично случаю однородного поля постоянную C мы выбрали здесь так, чтобы $U(0)=0$.

График потенциальной энергии в этом случае является параболой с минимумом в точке $x=0$ (рис. 9б).

Еще одна интересная задача — движение одного заряда в поле другого или, что почти одно и то же, движение одной массы в поле другой. Действительно, в первом случае на тело по закону Кулона действует сила $F=\frac{q_1q_2}{r^2}$, а во втором по закону всемирного тяготения $F=-\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$, то есть зависимость силы от расстояния между телами r в обоих случаях одинакова, отличие состоит лишь в коэффициенте. Разность потенциальных энергий, как мы знаем, равна площади под кривой $F=\frac{\alpha}{r^2}$ (рис. 10а), где для одной задачи $\alpha=q_1q_2$, а для другой $\alpha=-\gamma m_1m_2$. К сожалению, в отличие от двух разобранных выше



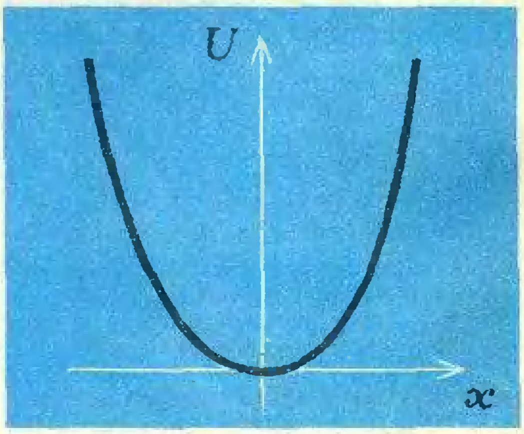


Рис. 9а,б

случаев ($F=\text{const}$, $F=-kx$) вычислить эту площадь оказывается не под силу без знания интегрального исчисления. Если же ее найти, то окажется, что для силы, меняющейся по закону $F=\frac{\alpha}{r^2}$, потенциальная энергия

$$U=\frac{\alpha}{r} \qquad (10)$$

Обратите внимание, что в формуле (10) мы выбрали постоянную C так, чтобы потенциальная энергия обращалась в нуль на бесконечности. Почему это удобно и когда? Вспомним, что потенциальная энергия характеризует действие тел друг на друга — взаимодействие; если на бесконечности сила обращается в нуль, то чем дальше тела отстоят друг от друга, тем слабее их взаимное влияние. Именно этому и соответствует выбор постоянной в нашем и аналогичных ($F(\infty)=0$) случаях.

Из формулы (10) следует, что вид потенциальной энергии существенным образом зависит от знака α (см. рис. 10б). Если $\alpha>0$, то сила $F=\frac{\alpha}{r^2}>0$, и мы имеем дело с отталкиванием (одноименные заряды, $\alpha=q_1q_2>0$). Если $\alpha<0$, то сила $F=-\frac{|\alpha|}{r^2}<0$, что соответствует притяжению (разноименные заряды, $\alpha=-q_1|q_2|$). Здесь, пожалуй, стоит еще раз вернуться к аналогии с санками, спускающимися с ледяной горки. Заметьте, что если поставить санки на горку, имеющую профиль интересующей нас потенциальной энергии, то они покатятся в направлении действия силы. Такое мнемоническое правило дает возможность сразу определить, что имеет место — притяжение или отталкивание. Действительно, ведь если санки покатятся к точке $r=0$ (например, нижняя кривая на рис. 10б), то имеет место притяжение, если наоборот (например, верхняя кривая), то — отталкивание.

Это же правило позволяет качественно построить вид потенциальной энергии для тех случаев, когда не удается его вычислить *). Давайте проследим за тем, как это делается, на примере двухатомной молекулы. Известно, что на большом расстоянии атомы устойчивых молекул притягиваются, если же сильно сблизить атомы, то они начнут отталкиваться. Характер притяжения и отталкивания существенным образом зависит от строения электронных оболочек атомов, однако, можно утверждать сле-

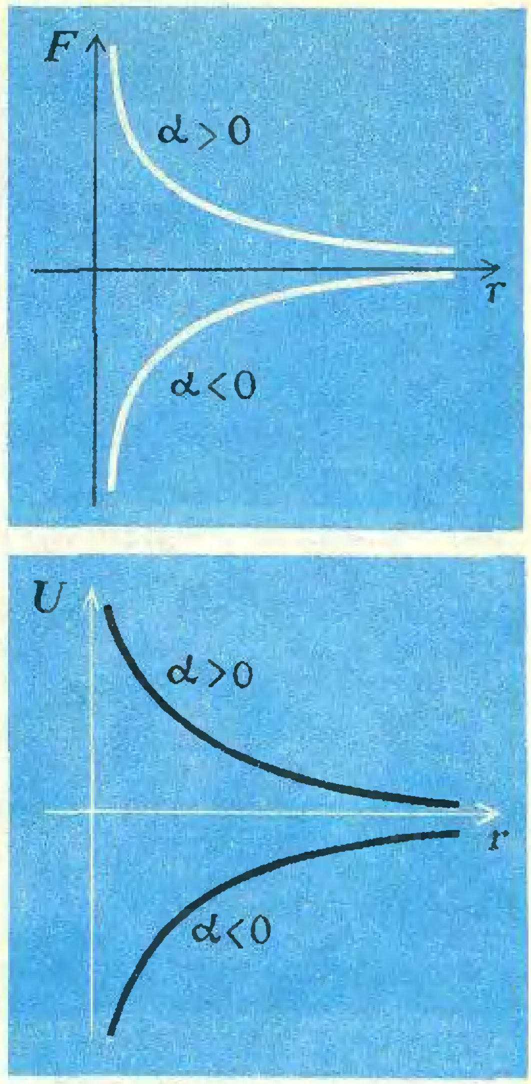


Рис. 10а б.

*) Это может быть связано как с вычислительными трудностями (например, незнание интегрального исчисления), так и с принципиальными (например, зависимость ядерных сил от расстояния известна лишь приближенно).

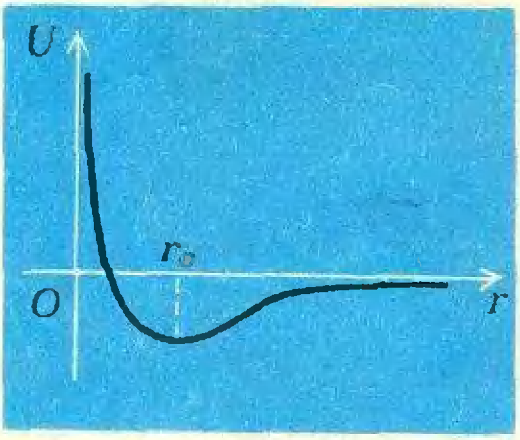


Рис. 11

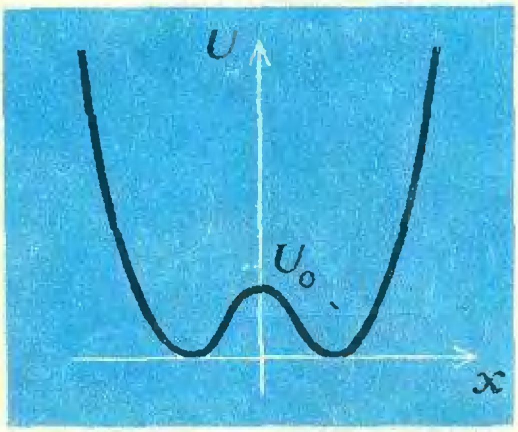


Рис. 12

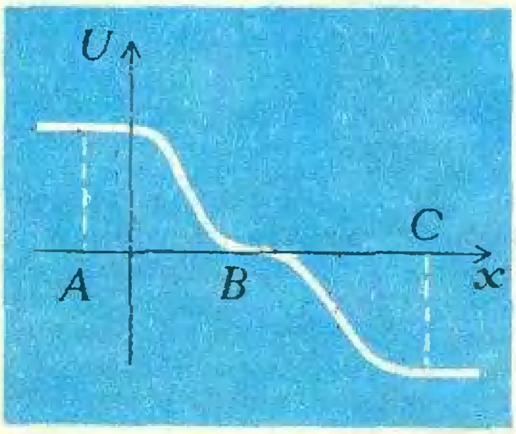


Рис. 13

дующее. На больших расстояниях притяжение быстро убывает, а отталкивание при сближении, начиная с некоторого расстояния, возрастает очень резко. Описанной картине взаимодействия атомов соответствует график потенциальной энергии, показанный на рисунке 11. Убедитесь в этом, воспользовавшись аналогией с ледяной горкой. Точка $r=r_0$ соответствует положению устойчивого равновесия, и поэтому r_0 равно расстоянию между атомами в молекуле.

В заключение подведем некоторые итоги. Мы видели, что по графику потенциальной энергии можно выяснить ряд существенных характеристик движения (число различных траекторий в зависимости от энергии, ограничено движение или нет, имеются ли положения равновесия и какие они: устойчивые или неустойчивые), каждая из них, как оказалось, имеет простой геометрический смысл. Легко также определить величину и направление действующей на тело силы («правило санок»). Мы показали, что площадь под графиком силы, взятая с обратным знаком, равна потенциальной энергии тела. Это дает возможность в ряде случаев непосредственно вычислить потенциальную энергию, что сильно облегчает решение различных задач.

И, наконец, вы видели, как качественный вид потенциальной энергии позволяет уяснить существо вопроса и дать на него ответ.

Попробуйте теперь самостоятельно решить следующие задачи.

Упражнения

1. Выяснить область возможного движения при

$$E<U_0 \text{ и } E>U_0,$$

если потенциальная энергия имеет вид, изображенный на рис. 12.

2. Найти положения равновесия по кривой потенциальной энергии (рис. 13) и выяснить их устойчивость.

Нарисовать график зависимости силы от координаты.

3. Показать геометрически, что при изменении потенциальной энергии на постоянную величину C сила, действующая на тело в каждой точке, не изменится.

4. Кубик со стороной a плотности $\rho_к$ плавает на поверхности жидкости, плотность которой $\rho_ж$. Нарисовать графики силы, действующей на кубик, и потенциальной энергии в зависимости от глубины погружения.

ЛУНОЧКИ ГИППОКРАТА

В. Н. Березин

В пятом веке до нашей эры, то есть почти две с половиной тысячи лет назад, жил в Греции ученый, звали его Гиппократ Хиосский. Именно Гиппократу принадлежит первая известная попытка создать «Начала» геометрии. К сожалению, книга эта до нас не дошла.

По одной из легенд неудачливый купец Гиппократ был ограблен пиратами и направился жаловаться на них в Афины. Здесь он встретился с мудрецами, которые проводили время, занимаясь, в основном, решением геометрических задач. Не найдя управы на грабителей, Гиппократ утешился тем, что превзошел в геометрии самых искусных мудрецов . . .

Гиппократ пытался осуществить квадратуру круга, иначе говоря, построить с помощью циркуля и линейки круг, равновеликий данному квадрату. И хотя это ему, естественно, не удалось, он сумел построить несколько фигур, представляющих собой куски плоскости, ограниченные дугами окружностей, и тем не менее равновеликих квадрату.

С именем Гиппократа в истории геометрии связаны фигуры особого вида, так называемые луночки. Луночку (иначе говоря, полумесяц) можно определить так: на хорде произвольного круга строят внешним образом полуокружность, концы которой совпадают с концами хорды. Фигура, ограниченная меньшей дугой окружности данного круга и проведенной полуокружностью, и есть луночка.

На рисунке 1 четыре такие луночки окрашены в желтый цвет. Гиппократ заметил, что суммарная их площадь равна площади квадрата, окрашенного здесь в голубой цвет. Действительно, сумма площадей полукругов, построенных на сторонах этого квадрата, равна площади круга, в который вписан квадрат. Если из полукругов удалить окрашенные в фиолетовый цвет сегменты, то останутся четыре луночки; если же удалить их из большого круга, то останется квадрат.

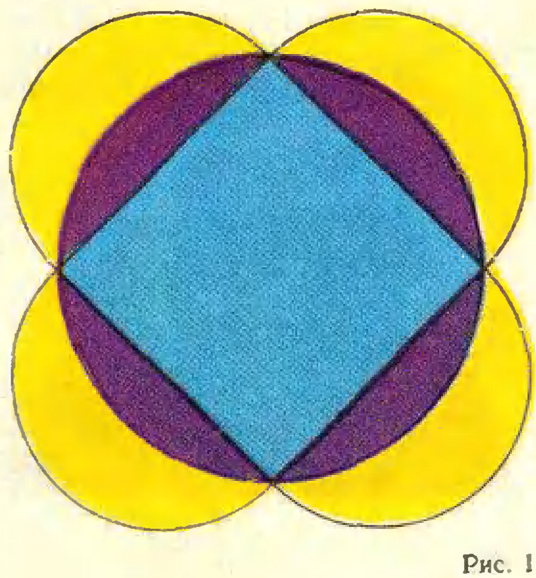


Рис. 1.

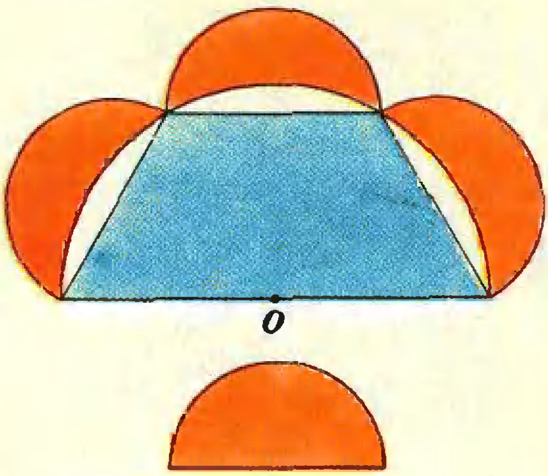


Рис. 2.

Рисунок 2 иллюстрирует еще одну теорему Гиппократа. Оказывается, площадь трапеции, вписанной в окружность с центром в точке O, равна сумме площадей оранжевых луночек и оранжевого полукруга (все три луночки равны по построению, полукруг равен тем полукругам, из которых образованы луночки). Доказывается эта теорема так же, как предыдущее утверждение.

На рисунке 3 приведена фигура, также составленная Гиппократом. Две боковые стороны и меньшее основание трапеции равны 1, большее основание равно $\sqrt{3}$. Нижняя дуга фигуры, заштрихованной на рисунке черными линиями и которую естественно назвать обобщенной луночкой, касается диагонали трапеции. Оказывается, что площади вписанной трапеции и луночки равны (доказать это можно, установив, что сумма площадей боковых и верхнего сегментов равна площади нижнего сегмента).

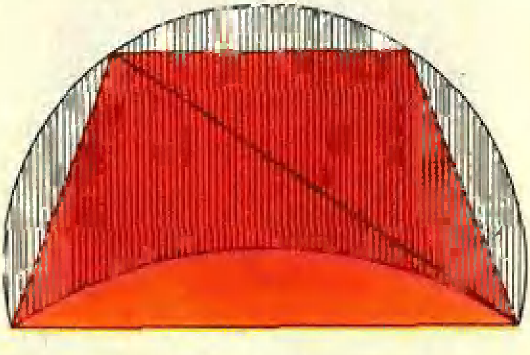


Рис. 3.

Квадратуру треугольника или трапеции осуществить несложно, так что у Гиппократа могло сложиться впечатление, что он близок к цели — квадратуре круга . . . Впрочем, более подробно о работах Гиппократа вы можете прочесть, например, в книге Б. Л. Ван дер Вардена «Пробуждающаяся наука», Физматгиз, 1959.

На рисунке 4 изображена фигура, об особенностях которой Гиппократ, по-видимому, не знал. А между тем площадь изображенного здесь прямоугольного треугольника равна сумме площадей луночек. Доказательство этого факта легко получить, если воспользоваться теоремой Пифагора. Кстати, у этой фигуры есть еще одно удивительное свойство. Луночки имеют одинаковую ширину. Точнее говоря, диаметры наибольших вписанных в них окружностей равны каждый половине разности между суммой катетов и гипотенузой треугольника, показанного на том же рисунке.

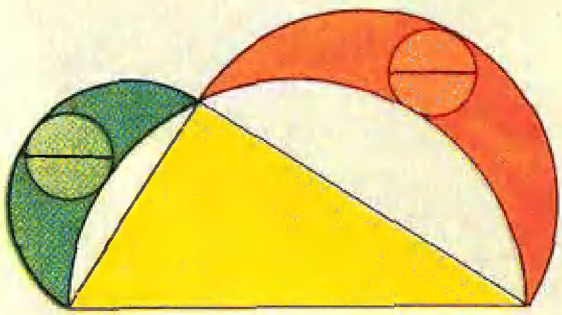


Рис. 4.

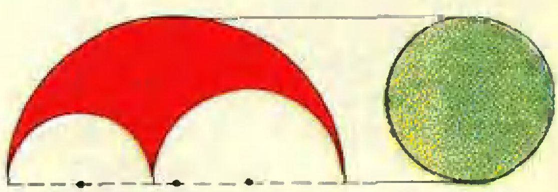


Рис. 5.

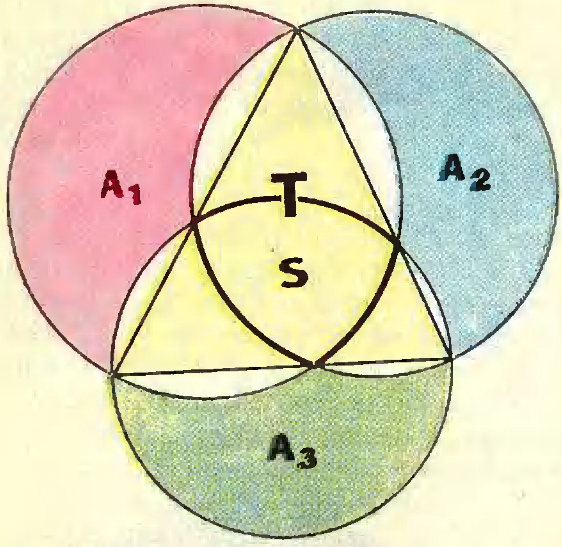


Рис. 6*а*.

На рисунке 5 слева изображена фигура, построенная Архимедом. Во всяком случае это утверждал в девятом столетии большой знаток трудов Архимеда арабский математик Сабит ибн-Корра. Источники, которыми он при этом пользовался, не сохранились. Фигуру эту называют арбелоном или «сапожным ножом».

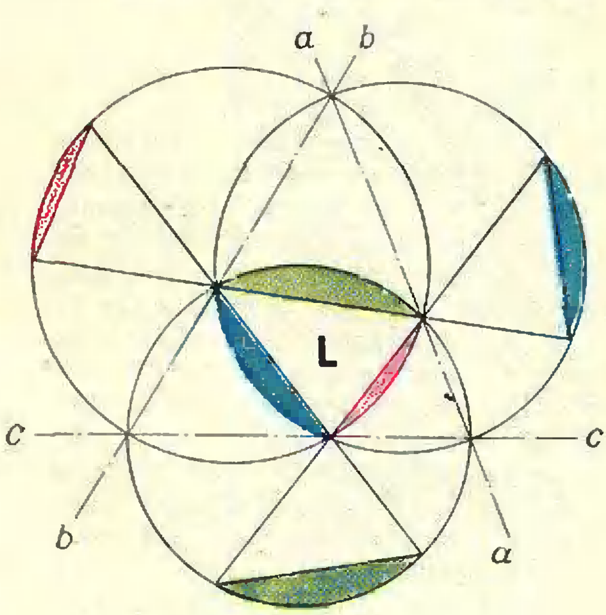
Сабит ибн-Корра показал, следуя, вероятно, Архимеду, что площадь арбелона равна площади круга, относительные размеры которого и способ построения показаны на рисунке 5. Доказательство предлагаем найти вам самим.

Фигура, изображенная на рисунке 6*а*, к древней математике не имеет непосредственного отношения. Треугольник T произвольный, стороны его служат диаметрами трех кругов. Фигура эта обладает свойством, которое роднит ее с ранее рассмотренными фигурами. Оказывается, что сумма площадей арбелонов A_1, A_2 и A_3 без площади криволинейного треугольника S равна удвоенной площади треугольника T (если треугольник T прямоугольный, то два арбелона вырождаются в луночки).

Приведем геометрическое доказательство этого неожиданного факта.

На рисунке 6*б* проведены и продолжены отрезки, соединяющие вершины данного криволинейного треугольника. В силу симметрии сегменты, окрашенные здесь в одинаковый цвет, равновелики (симметрия вытекает, например, из такой теоремы: высоты основного треугольника являются биссектрисами треугольника с вершинами в основаниях этих высот; доказательство можно посмотреть в книге Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры», Физматгиз, 1962).

На рисунке 6*в* видим пары других симметричных сегментов (осями сим-



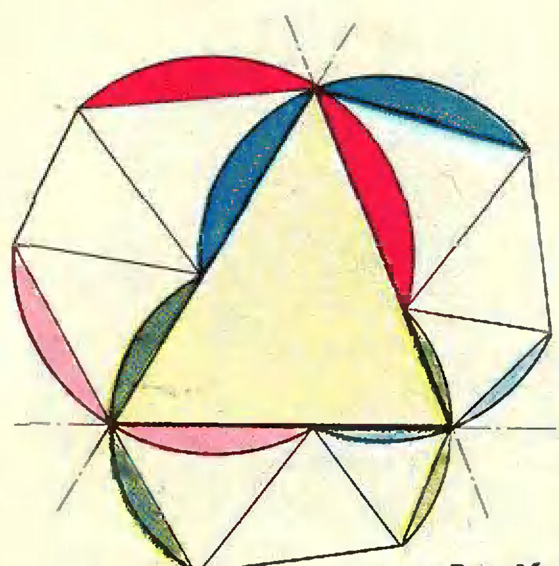


Рис. 6*б*, *в*.

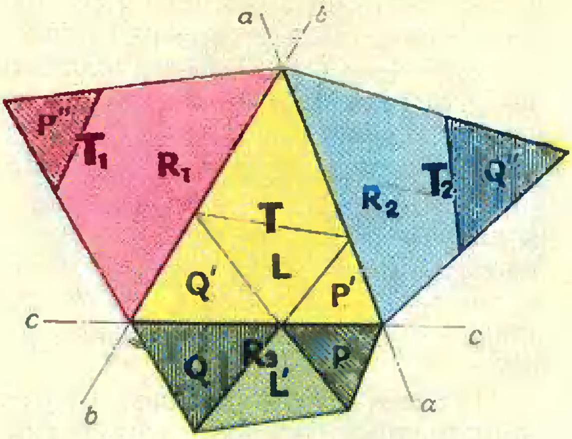


Рис. 6г.

метрии по-прежнему служат стороны треугольника T).

Поскольку симметричные сегменты равновелики, достаточно теперь доказать (см. рис. 6 *г*), что сумма площадей четырехугольников R_1, R_2 и R_3 без площади треугольника L равна удвоенной площади треугольника T.

Треугольники L и L' симметричны относительно стороны c. Отразим теперь треугольники P и Q сначала относительно стороны c. Получаем треугольники P' и Q'. Затем отразим треугольник P' относительно стороны *в*, а треугольник Q' — относительно стороны a. Образуется фигура из двух треугольников T_1 и T_2. Оба эти треугольника симметричны

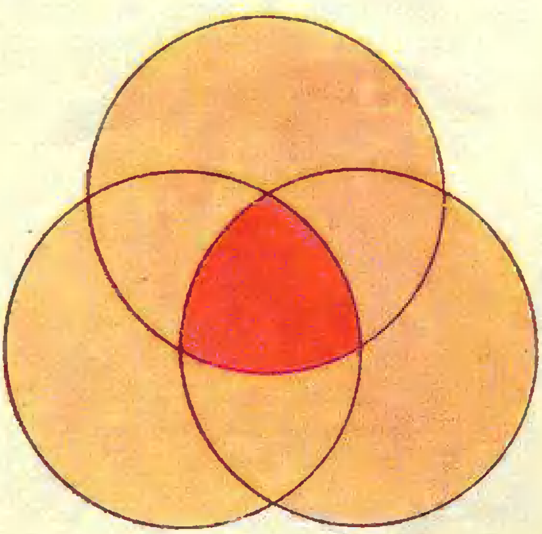


Рис. 7

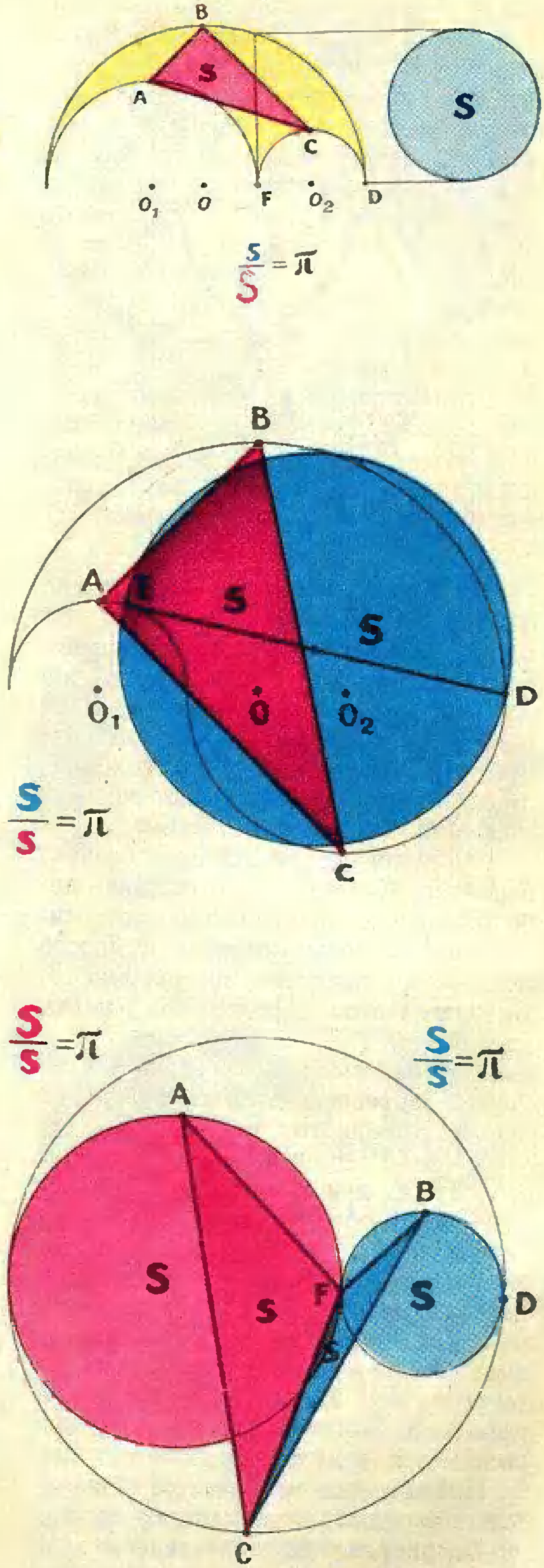


Рис. 8*а,б,в*.

треугольнику T (один относительно стороны b, другой относительно стороны a), поэтому они и равновелики ему. Таким образом, наше утверждение доказано.

Попробуйте теперь свои силы на задачах, геометрическое решение которых опирается на мотивы, родственные только что разобранным.

1. Обратимся к рисунку 7. На нем изображен криволинейный треугольник, образованный пересечением трех кругов одинакового радиуса. Что больше по площади: четверть такого круга или криволинейный треугольник?

Еще одно упражнение

2. На рисунках 8*а* — 8*в* изображены соответственно арбелон, зеркальное отражение запятой и фигура, представляющая дополнение арбелона до объемлющего его круга. Точки A, B и C в каждом из этих случаев делят пополам полуокружности, центры окружностей которых находятся соответственно в точках O_1, O, O_2. Точка D на рисунке 8*б* — конец диаметра окружности с центром в O, проходящего через точки O_1 и O_2. DE — касательная, проведенная из точки D (рис. 8*б*) к окружности, центр O_1 которой на этом рисунке максимально удален от D.

Требуется доказать, что:

а) На рисунке 8*а* площадь круга, нарисованного справа (или равная ей площадь арбелона), относится к площади треугольника ABC как π.

б) На рисунке 8*б* площадь круга с диаметром DE относится к площади треугольника ABC как π

в) На рисунке 8*в* площадь круга проходящего через точки B и D, относится к площади треугольника BFC как π, и площадь круга, проходящего через точки A, F и C, относится к площади треугольника AFC как π.

Тем, кто заинтересовался историей вопроса о квадрировании луночек, мы рекомендуем прочесть в книге Архимед «Сочинения», Физматгиз, 1962, главу «Измерение круга».

ДВА ВЗВЕШИВАНИЯ

Задачи, связанные с гирями и весами, очень популярны в последнее время. Это — необычная новая задача, предложенная Полем Кари, служащим из Нью-Йорка. Имеется шесть гирь. Одна пара — красная, другая — белая, третья — голубая. В каждой паре одна из гирь немного легче другой, но выглядят обе одинаково. Три более тяжелые гири весят одинаково. То же условие и для более легких гирь.

Как определить двумя взвешиваниями на чашечных весах, какая гиря в каждой из пар тяжелее?

ШИФРОВКА

Эта шифровка (или ребус, как предпочитают называть ее многие составители задач) очень стара, и происхождение ее неизвестно. Это, безусловно, одна из лучших шифровок, и, я надеюсь, она неизвестна большинству читателей: $\dfrac{EVE}{DID} = 0,$

$$TALKTALKTALK\ \ldots$$

Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры. (Одна из них может быть и нулем.) Знаменатель и числитель дроби $\dfrac{EVE}{DID}$ **взаимно просты. Равная ей десятичная дробь имеет период из четырех цифр. Имеется только одно решение.**

Физика помогает геометрии

Б. Ю. Коган

При изучении физики, конечно, используется математика. Но, оказывается, бывает и наоборот — физика приносит пользу математике. Вот несколько примеров того, как понятие центра тяжести можно использовать в геометрии.

1. Теорема о медианах треугольника. Поместим в вершины треугольника (рис. 1) материальные точки одинаковой массы. Центр тяжести системы точек A и B находится в точке K — середине отрезка AB. Значит, центр тяжести системы точек A, B и C лежит на медиане CK. Рассуждая аналогично, мы придем к выводу, что этот центр тяжести лежит на медиане AL и на медиане BM. Но у системы точек A, B и C всего лишь один центр тяжести. Следовательно, медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Далее, так как точка C имеет массу m, а точка K «представляет» систему точек A и B, имеющую массу $2m$, то KS вдвое меньше SC. Следовательно, точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2:1.

2. Теорема о средних линиях четырехугольника. Поместим в вершины четырехугольника $ABCD$ материальные точки одинаковой массы (рис. 2). Так как центр тяжести системы точек A и B лежит в точке K — середине отрезка AB, а центр тяжести системы точек C и D — в точке M — середине отрезка CD, то центр тяжести системы точек A, B, C и D находится на отрезке KM, соединяющем середины сторон AB и CD. Назовем этот отрезок средней линией четырехугольника. Рассуждая аналогично о точках B и C

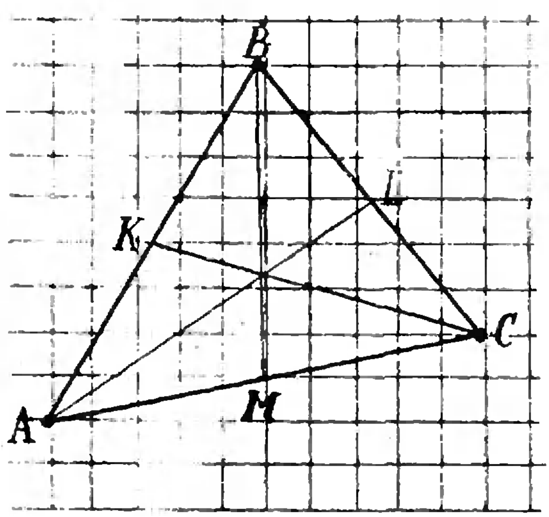


Рис. 1.

или о точках A и D, мы придем к выводу, что центр тяжести системы точек A, B, C и D лежит на пересечении средних линий KM и LN. Далее так, как система точек A и B имеет такую же массу, как и система точек C и D, то $KS=SM$. Рассуждая аналогично, найдем, что $LS=SN$. Следовательно, средние линии четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам.

Заметим, что в наших рассуждениях нигде не использовался тот факт, что точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Значит, доказанная теорема верна и для пространственного четырехугольника. (Из нее следует, что средние линии такого четырехугольника обязательно пересекаются.)

3. Обобщение предыдущей теоремы. Рассмотрим произвольный четырехугольник $ABCD$ (рис. 3). Поместим в его вершины материальные точки: в вершину A — массы m, в вершину B — массы αm, в вершину D — массы βm и в вершину C — массы $\alpha\beta m$, где α и β — произвольные положительные числа. Тогда центр тяжести системы точек A, B, C и D будет лежать на пересечении прямых KM и LN, где K — центр тяжести системы точек A и B, M — центр тяжести системы точек C и D, L — центр тяжести системы точек B и C и N — центр тяжести системы точек A и D. Далее, так как длины плеч обратно пропорциональны соответствующим весам, то

$$\frac{AK}{KB}=\frac{\alpha m}{m}=\alpha, \quad \frac{DM}{MC}=\frac{\alpha\beta m}{\beta m}=\alpha,$$

$$\frac{NS}{SL}=\frac{\alpha m+\alpha\beta m}{m+\beta m}=\alpha, \quad \frac{BL}{LC}=\frac{\alpha\beta m}{\alpha m}=\beta,$$

$$\frac{AN}{ND}=\frac{\beta m}{m}=\beta,$$

$$\frac{KS}{SM}=\frac{\alpha\beta m+\beta m}{\alpha m+m}=\beta.$$

Следовательно, если стороны этого четырехугольника разделить так, что

$$\frac{AK}{KB}=\frac{DM}{MC}=\alpha, \quad \frac{BL}{LC}=\frac{AN}{ND}=\beta,$$

то отрезки NL и KM разделятся в том

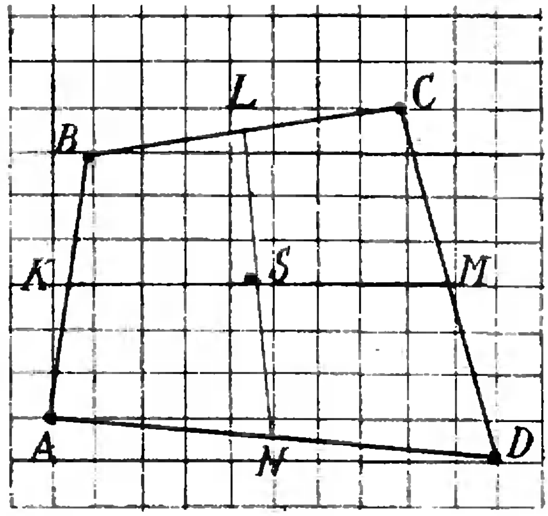


Рис. 2.

же отношении:

$$\frac{NS}{SL}=\alpha, \quad \frac{KS}{SM}=\beta.$$

Доказанная теорема приводит к интересному результату. Разделим одну пару противоположных сторон четырехугольника на k одинаковых частей, а другую — на l одинаковых частей. Соединив затем соответственные точки противоположных сторон, получим сетку, подобную той, что показана на рисунке 4. (Здесь $k=3$, а $l=4$.) Причем каждый из отрезков, соединяющих противоположные стороны, окажется разбитым на участки одинаковой длины.

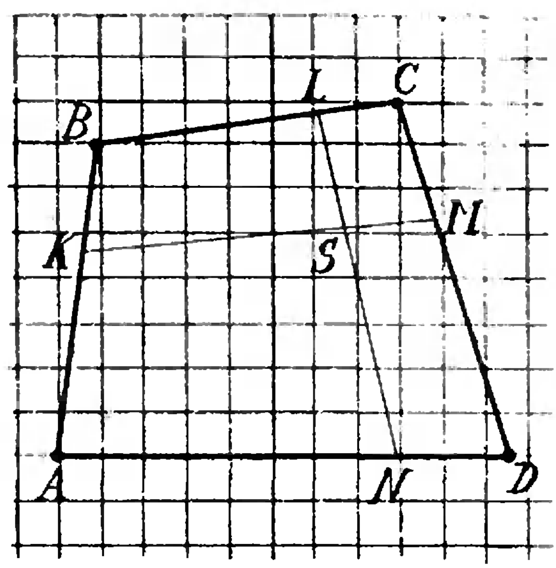


Рис. 3.

Например, на рисунке 4 каждый «вертикальный» отрезок разбит на три одинаковых участка, а каждый «горизонтальный» — на четыре одинаковых участка *).

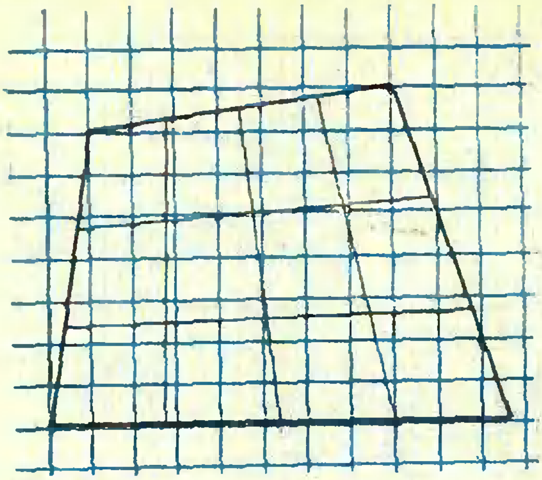


Рис. 4.

4. **Нахождение соотношений отрезков.** С помощью представления о центре тяжести легко решаются задачи следующего типа. На сторонах треугольника ABC поставлены точки K и L (рис. 5). Зная, что $\frac{AK}{KB}=\frac{1}{2}$ и $\frac{BL}{LC}=\frac{3}{5}$, найти отношения $\frac{AS}{SL}$ и $\frac{CS}{SK}$.

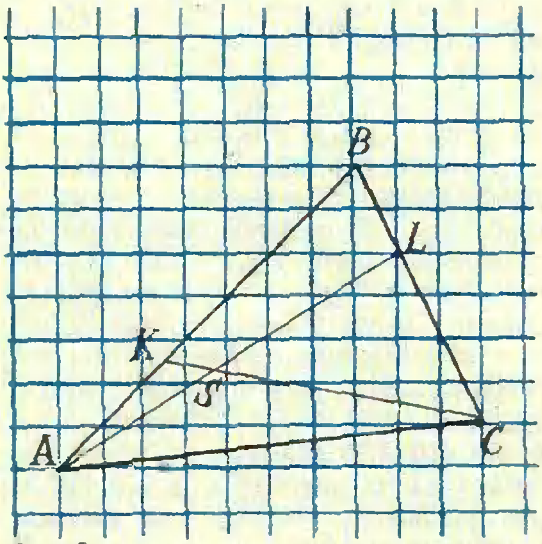


Рис. 5.

Решение. Поместим в вершины A, B, C материальные точки так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{m_B}{m_A}=\frac{AB}{KB}=\frac{1}{2},\quad \frac{m_C}{m_B}=\frac{BL}{LC}=\frac{3}{5},$$

например, положим

$$m_A=10m,\quad m_B=5m,\quad m_C=3m.$$

Тогда центр тяжести системы точек A и B будет лежать в точке K, а центр тяжести системы точек B и C — в точке L. Следовательно, центр тяжести системы точек A, B и C лежит на прямой CK и в то же время на прямой AL, то есть он помещается в точке пересечения S. Отсюда легко найти, что

$$\frac{AS}{SL}=\frac{m_B+m_C}{m_A}=\frac{5m+3m}{10m}=\frac{4}{5},$$

$$\frac{CS}{SK}=\frac{m_A+m_B}{m_C}=\frac{10m+5m}{3m}=\frac{5}{1}.$$

Задачи

1. Каждая вершина тетраэдра соединена с точкой пересечения медиан противоположной грани. Доказать, что четыре полученных отрезка пересекаются в одной точке.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AK. Прямая, соединяющая вершину C с серединой медианы, пересекает сторону AB в точке L. Найти отношение $AL:LB$.

3. В треугольнике ABC, показанном на рисунке 6,

$$\frac{AK}{AB}=\frac{BL}{BC}=\frac{CM}{CA}=\frac{1}{3}.$$

Какую часть от площади треугольника ABC составляет сумма площадей заштрихованных треугольников?

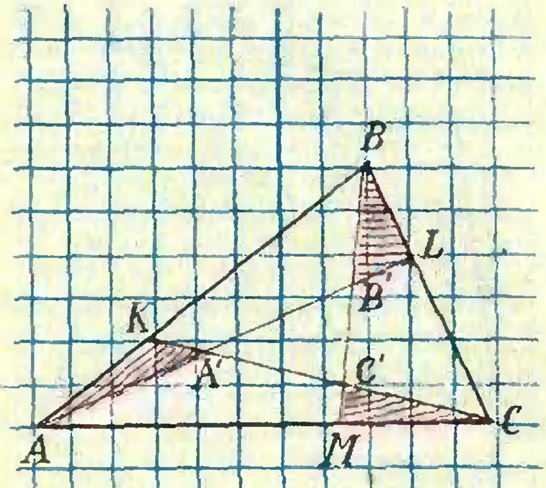


Рис. 6.

*) Эта теорема верна и для неплоского четырехугольника.

Первое знакомство с номограммами

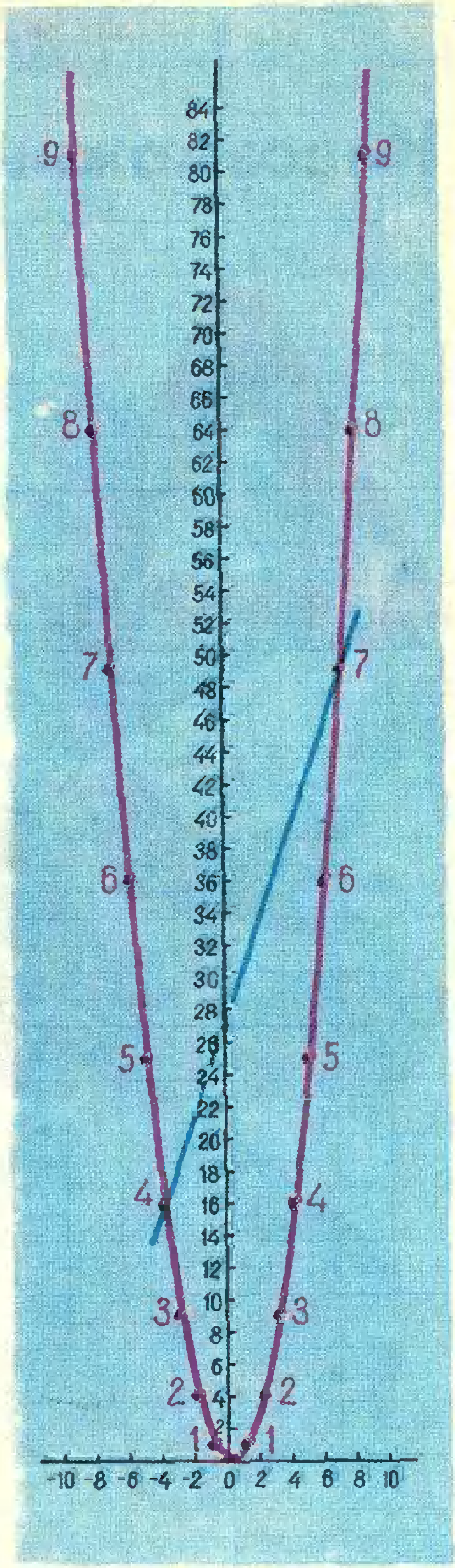
Ю. В. Матиясевич

На рисунке справа цифрами 1, 2,..., 9 отмечены те точки на параболе $y=x^2$, абсциссы которых равны ±1, ±2, ..., ±9. В результате получилась необычная таблица умножения. Чтобы узнать, чему равно, например, 4×7, достаточно соединить прямой линией точку, отмеченную цифрой 4 на левой ветви параболы, с точкой, отмеченной цифрой 7 на правой ветви. Эта прямая пересекает ось ординат в точке, отмеченной числом 28, и действительно, $4\times7=28$.

Проверьте сами другие «строчки» этой «таблицы». Конечно, для этого нет необходимости рисовать линии, достаточно просто приложить линейку или натянуть нитку.

Такие «считающие чертежи» называются *номограммами*. Ясно, что построенная нами номограмма не имеет большой ценности — таблицу умножения помнит каждый. Но номограммы можно строить и для более сложных функций. В таких случаях они значительно сокращают время вычислений.

Вы познакомитесь с другими номограммами и научитесь делать их, если прочтете книжку М. В. Пентковского «Считающие чертежи» (М., «Физматгиз», 1959).



Упражнения

1. Укажите, как надо расставлять числа на параболе $y=ax^2$ $(a>0)$, чтобы также получить таблицу умножения.

2. Дайте обоснование построенной номограмме.

Невозможные объекты

Л. Пенроуз, Р. Пенроуз

Рис. 1.

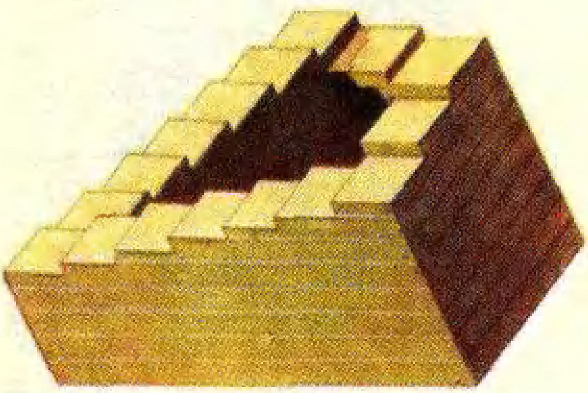


Рис. 2.

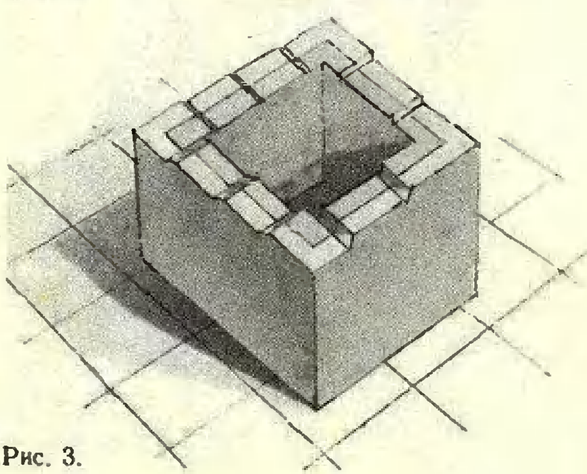


Рис. 3.

Впечатление от трехмерных предметов можно передать с помощью плоских изображений. Этим можно воспользоваться для того, чтобы создать противоречивое впечатление.

Здесь описаны рисунки несуществующих конструкций. Каждая отдельная часть воспринимается как изображение трехмерного объемного предмета, но весь рисунок за счет неправильного соединения этих частей кажется предметом-призраком.

Пример такой конструкции показан на рисунке 1. Каждая часть —это брусок прямоугольного сечения, но линии на рисунке соединены так, что изображенный предмет ие существует в действительности. По мере того, как глаз следует вдоль грани бруска, изменяется кажущееся расстояние от предмета до наблюдателя.

На рисунке 2 показана конструкция, каждая часть которой—ряд ступенек. Однако части эти соединены друг с другом так, что картина в целом несовместима: ступеньки все время поднимаются.

Иллюзию несуществующих конструкций могут вызвать и фотографии существующих предметов. Для этого они должны быть сконструированы специальным образом и сфотографированы под определенным углом. Пример подобной фотографии показан на рисунке 3. Здесь фотография действительно существующей модели вызывает то же впечатление, что и изображение несуществующей лестницы (рис. 2). Это вызвано тем, что крайняя правая ступенька при фотографировании находилась ближе к фотоаппарату и выше, чем ступенька, которая кажется расположенной прямо над ней.

Фотографирование невозможных объектов

В. И. Бахмин

Обычные двумерные фотографии и рисунки можно рассматривать двояко. С одной стороны — это система линий на плоскости, с другой — изображение объектов совсем иного, трехмерного пространства. В мозгу информация перерабатывается, и мы воссоздаем по имеющемуся двумерному изображению трехмерный мир. Подобный процесс происходит не только при рассматривании двумерных фотографий и рисунков. Известно, например, что на сетчатке глаза человека все отражается в перевернутом виде, но мы воспринимаем изображение как нормальное. Можно надеть особые очки и попытаться видеть мир перевернутым. Однако вскоре мозг приспосабливается, и изображение вновь будет восприниматься как нормальное. Таким образом, мозг постоянно перерабатывает получаемую зрительную информацию и согласовывает ее с информацией, получаемой от остальных органов чувств. Так вырабатывается наше представление об окружающем мире.

Иногда из двумерного рисунка или фотографии мозг не может однозначным образом построить реально существующий трехмерный объект. Такие объекты получили название невозможных. Хотя реально эти объекты не существуют, можно все-таки сделать трехмерную модель, которая создает впечатление невозможного объекта, если ее сфотографировать из определенной точки. Например, изображенный на рисунке 1 невозможный треугольник, придуманный Пенроузом, можно получить, сделав

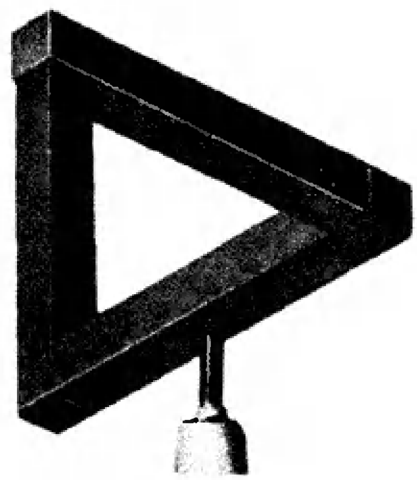


Рис. 1. Невозможный треугольник Пенроуза.

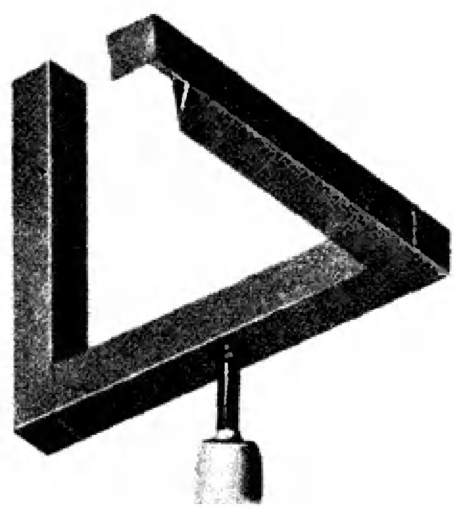


Рис. 2. Модель, придуманная Грегори, позволяет получить фотографию невозможного треугольника Пенроуза.

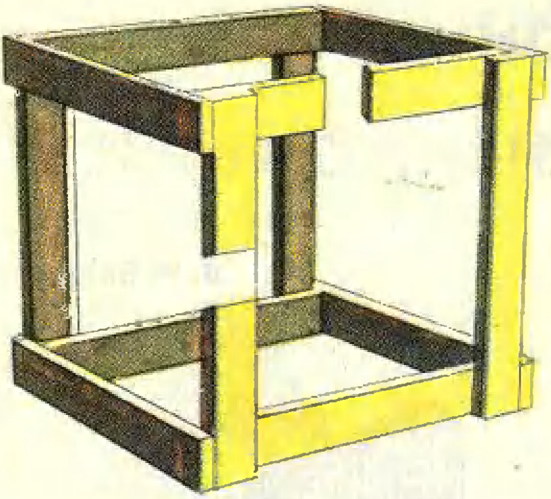


Рис. 3. Модель невозможного куба.

разомкнутую трехмерную модель (рис. 2). Если смотреть на такую модель одним глазом и найти нужную точку, можно увидеть, как две разъединенные стороны модели совместятся. Сфотографировав модель из этого положения, вы получите фотографию невозможного треугольника Пенроуза.

Этот прием используется и для получения изображения невозможного куба. Если вы сделаете такую клетку, которая изображена на рисунке 3, то, расположив ее так, чтобы задние ребра клети закрыли прорези в передних, вы увидите невозможный куб: задние ребра клетки будут казаться выдвинутыми вперед. (Из этого положения можно получить и фотографию.) Физиолог Гибсон, использовав эту идею, придумал ряд интересных иллюзий, в которых он использовал картонные прямоугольники с прорезями в некоторых из них, для того чтобы более удаленный из прямоугольников казался расположенным на переднем плане. На рисунке 4 два набора квадратов, хотя и кажутся одинаковыми, по-разному расположены в пространстве, а в третьем ряду валет на самом деле находится ближе шестерки, и карты, следовательно, одинаковы по размеру. Такую фотографию можно получить, сделав соответствующие прорези в ближе расположенной карте и в среднем прямоугольнике, через которые можно увидеть более удаленную шестерку (рис. 5).

Другая серия такого же рода оптических иллюзий может быть получена с помощью так называемой искривленной комнаты Эймса, геометрия которой показана на рисунке 6. Сделана эта комната несколько необычно. Пол в ней наклонен и повышается вправо от наблюдателя, задняя стена удаляется по мере продвижения налево, окна на этой стене разных размеров и имеют форму трапеции. Однако если в такую комнату смотреть из определенной точки, она выглядит совсем обычной: пол кажет-

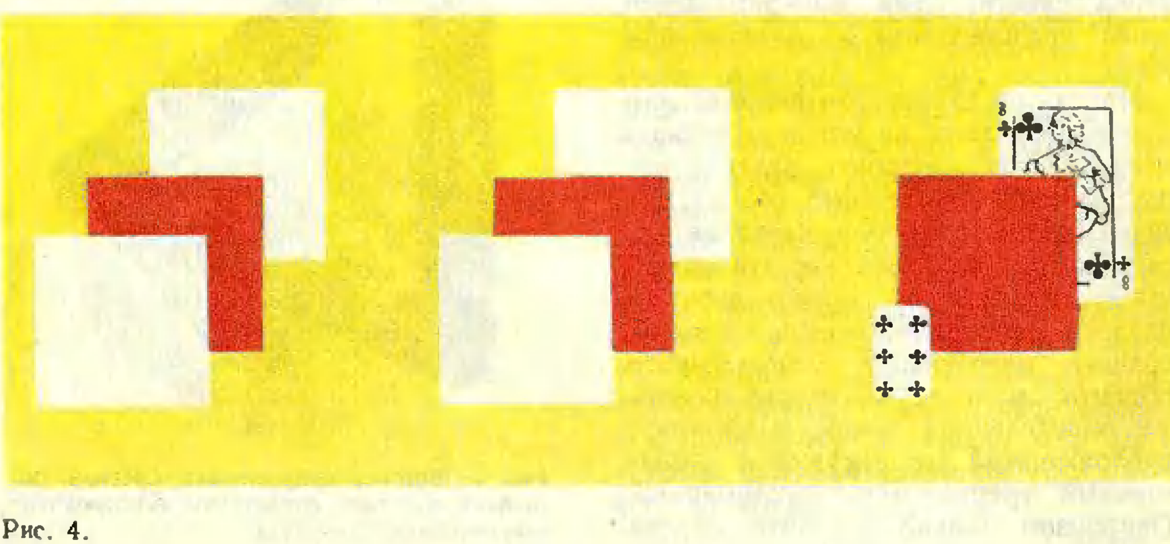


Рис. 4.

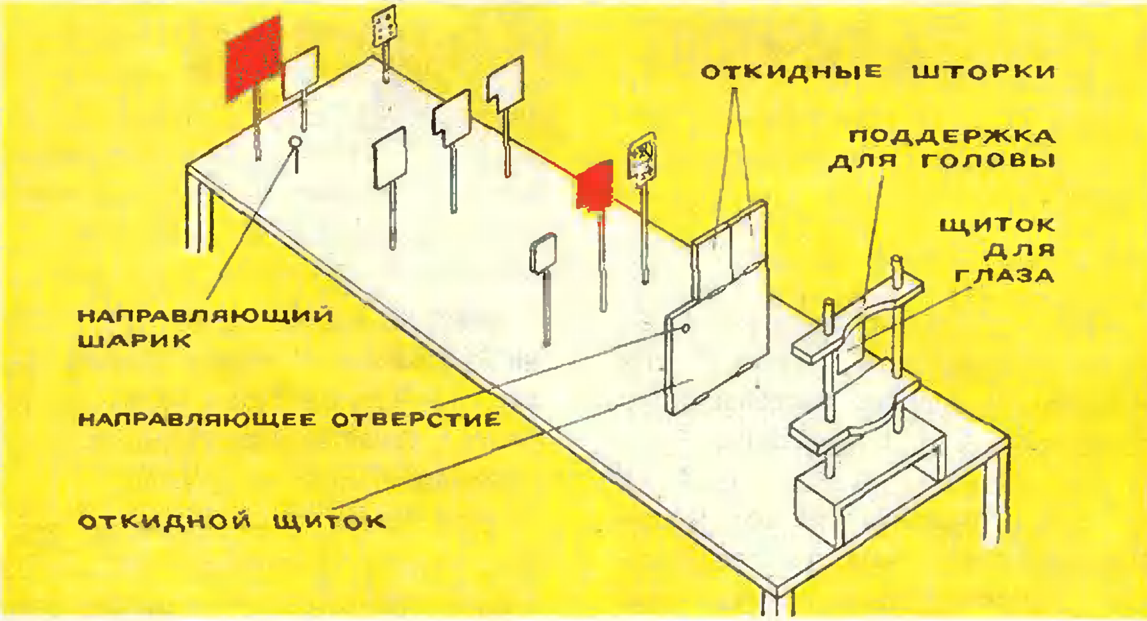


Рис. 5. Устройство, позволяющее наблюдать иллюзию, которую вы видите на рисунке 4.

ся ровным, задняя стенка — перпендикулярной направлению взгляда, а окна — прямоугольными и одинаковыми. Эймс сделал одну из таких комнат достаточно большой для того, чтобы в ней могли находиться люди. Получился удивительный эффект: когда зритель рассматривает людей, прогуливающихся вдоль этой комнаты, он наблюдает необычайные изменения их размеров. В зависимости от того, куда идет человек, он кажется то растущим, то уменьшающимся.

Малая модель такой комнаты позволяет видеть в окнах задней стенки руки или лицо человека. Как и в большой комнате, руки или лица кажутся ненормально большими или маленькими в зависимости от того, появляются ли они в окнах справа от наблюдателя или слева. Мы настолько привыкли к комнатам обычной формы, что в комнате Эймса воспринимаем как реальные даже сильно искаженные объекты. Восприятие изображения — психологический процесс. При этом важно отношение наблюдателя к предмету наблюдения и даже его состояние в данный момент. Интересно, что лица хорошо знакомых людей воспринимаются в комнате Эймса вполне нормальными, при этом вся тайная геометрия комнаты становится заметной наблюдателю.

Конечно, самим построить большую комнату Эймса довольно сложно. Но сделать небольшую модель, по-видимому, можно. Помещая внутрь различные предметы, вы при желании сможете получить довольно эффектные фотографии. Почему бы не попробовать?

Рис. 6. Геометрия искривленной комнаты Эймса.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Задачи

М81. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята произвольная точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на прямую A_2P, из вершины A_2 — на A_3P, из A_3 — на A_4P, из A_4 — на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

А. Н. Виленкин

М82. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Известно, что если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных автомашин.

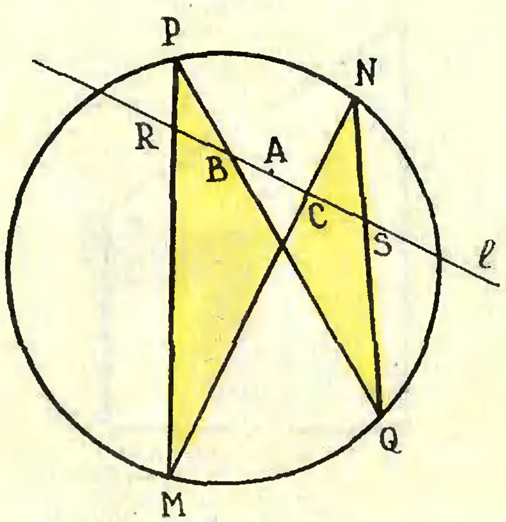


Рис. 1.

М83. Докажите, что числа $1, 2, \ldots, n$ ни при каком n нельзя разбить на две группы так, чтобы произведение чисел в одной группе равнялось произведению чисел в другой.

М84. Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из центра данной окружности на данную прямую l.

На этой прямой взяты еще две точки B и C так, что

$$AB = AC.$$

Через точки B и C проведены две произвольные секущие, из которых одна пересекает окружность в точках P и Q, вторая — в точках M и N. Пусть прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S. Докажите, что

$$AR = AS.$$

Эту задачу (или некоторые ее варианты) называют иногда «задачей о бабочке»; происхождение такого названия ясно из рисунка 1.

М85. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — попарно различные натуральные числа, ни одно из которых не делится на квадрат целого числа, большего единицы, а $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — целые числа, отличные от нуля, то

$$b_1\sqrt{a_1} + b_2\sqrt{a_2} + \ldots + b_m\sqrt{a_m} \neq 0.$$

Л. Н. Васерштейн

Ф93. В боковой стенке сосуда, наполненного жидкостью с показателем преломления n, проделано отверстие небольшого радиуса r. По оси отверстия из сосуда направляют горизонтально тонкий луч света. До какого уровня h над отверстием должна вытечь жидкость, чтобы луч света вышел из струи, ни разу не испытав полного внутреннего отражения?

Изменением поперечного сечения струи пренебречь, показатель преломления жидкости считать достаточно большим.

И. Ф. Гинзбург

Ф94. Над одной грамм-молекулой идеального газа совершают цикл (замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 2)). Температуры в точках *1* и *3* равны T_1 и T_3 соответственно. Определить работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки *2* и *4* лежат на одной изотерме.

Ф95. Поверхность реки образует наклонную плоскость. Может ли тело свободно плыть по реке со скоростью, превышающей скорость течения или максимальную скорость течения?

Ф96. Два одинаковых шарика связаны нитью. Найти высоту подъема этой системы, если один из шариков бросили вверх со скоростью v.

А. Дроздов

Ф97. Виток изолированного провода изогнут в виде восьмерки, кольца которой имеют радиусы $r_1 = 1$ *см* и $r_2 = 3$ *см*. Виток находится в магнитном поле с индукцией $B = 10^4$ *гс*, перпендикулярном плоскости витка.

Изоляция провода рассчитана на напряжение 10 *в*. Произойдет ли пробой изоляции, если магнитное поле резко выключить? Время выключения поля 10^{-3} *сек*.

Л. Г. Асламазов

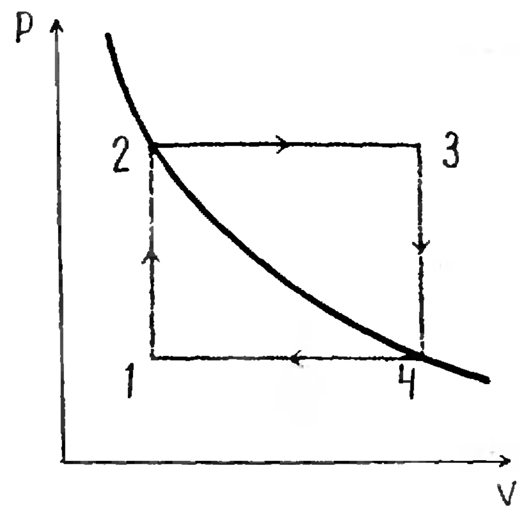


Рис. 2.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М31—М33

М31

Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезают на две части, и так делают много раз. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось ровно сто двадцатиугольников?

При каждом разрезании общее число кусков бумаги увеличивается на 1 (так как один кусок пропадает и появляются два новых), поэтому после n разрезов будет $(n+1)$ кусков бумаги.

Подсчитаем теперь, каким может быть общее число вершин во всех кусках вместе после n разрезов. При каждом разрезании общее число вершин увеличивается либо на 2 (если резали через две вершины), либо на 3 (если резали через вершину и сторону), либо на 4 (если резали через 2 стороны). Так как сначала было 4 вершины, то после n разрезов во всех кусках вместе будет не больше чем $4n+4$ вершины.

Предположим, что после N разрезов получилось 100 двадцатиугольников. Так как при этом общее число полученных кусков будет $N+1$, то, кроме этих двадцатиугольников, будет еще $N+1—100$ кусков. Каждый из этих кусков будет иметь не меньше трех вершин, поэтому общее число вершин во всех кусках будет не меньше чем $100\cdot 20+(N—99)\cdot 3$. Как было доказано раньше, это число не больше чем $4N+4$. Значит,

$$4N+4\geqslant 100\cdot 20+(N-99)\cdot 3=$$
$$=3N+1703,$$

откуда $N\geqslant 1699$.

Итак, мы доказали, что нельзя получить 100 двадцатиугольников, сделав меньше чем 1699 разрезов. Это основная и самая трудная часть доказательства.

Покажем теперь, как можно получить 100 двадцатиугольников, сделав 1699 разрезов. Вот один из способов: разрежем квадрат на 100 прямоугольников (99 разрезов) и каждый прямоугольник за 16 разрезов превратим в двадцатиугольник, отрезая от углов треугольники (1600 разрезов). Всего будет 1699 разрезов.

Ответ. Можно получить ровно 100 двадцатиугольников, сделав 1699 разрезов, а сделав меньшее число разрезов, 100 двадцатиугольников получить нельзя.

Точно так же можно узнать, какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы получить ровно k l-угольников.

Точное решение этой задачи прислали *Д. Григорьев* из Ленинграда и *В. Лившиц* из Запорожья.

И. Н. Бернштейн

М32

Во всех клетках таблицы 100×100 стоят плюсы. Разрешается одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, где ровно 1970 минусов?

Пусть в i-й строке мы изменили знак x_i раз, в k-м столбце — y_k раз. Тогда в клетке, стоящей на пересечении i-й строки и k-го столбца, знак изменится x_i+y_k раз. Следовательно, в этой клетке будет стоять минус в том и только в том случае, когда x_i+y_k нечетно. Таким образом. об-

	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+

Рис. 1.

щее количество минусов в полученной таблице зависит только от четности чисел x_i и y_k; на рисунке 1 вместо четных чисел поставлены нули, вместо нечетных — единицы. Пусть x — число нечетных чисел среди x_i; y — число нечетных чисел среди y_k (на рисунке $x=5$, $y=4$). Тогда, как нетрудно посчитать, общее число минусов в таблице будет равно

$$x(100-y)+(100-x)y = \\ =100x+100y-2xy,$$

где x, y — целые.

Теперь вернемся к нашей задаче и докажем, что ответ в ней отрицательный, т. е. 1970 минусов получить *невозможно*. *Предположим, что нам* удалось получить ровно 1970 минусов. Тогда $1970 = 100x+100y-2xy$, откуда

$$xy-50x-50y+2500=1515.$$

Разложив левую часть на множители, получаем

$$(x-50)(y-50) = 1515 = 15\cdot 101.$$

Имеем

$$-50\leqslant x-50\leqslant 50, \quad -50\leqslant y-50\leqslant 50.$$

Поскольку число 101 простое, то либо $x-50$, либо $y-50$ должно делиться на 101 (ведь их произведение делится на 101). Но из предыдущих неравенств тогда следует, что либо $x-50$, либо $y-50$ равно 0. Итак, мы получили противоречие, которое доказывает, что ровно *1970 минусов* получить невозможно.

Правильное решение прислал *Д. Григорьев*.

А. В. Зелевинский

М33

Имеется натуральное число $n>1000$. Возьмем остатки от деления числа 2^n на числа 1, 2, 3,..., n и найдем сумму этих остатков. Доказать, что эта сумма больше $2n$.

Обозначим сумму остатков от деления 2^n на числа 1, 2,..., n через S_n. Мы усилим утверждение задачи и докажем, что при $n>1000$ $S_n>3{,}5n$. Попутно мы докажем тем же методом, что

$$S_n > \frac{n}{2}(\log_2 n - 4)$$

при любом n.

Мы следуем, в основном, решению *Д. Григорьева* из Ленинграда. Решение основано на очень простом соображении: 2^n не делится нацело ни на какое нечетное число, отличное от 1, значит, остаток от деления 2^n на такое число не меньше 1. Отсюда легко вывести, что для любого нечетного $k>1$ остаток от деления 2^n на $2^l k$ не меньше 2^l. Действительно, пусть остаток от деления 2^{n-l} на k равен r, то есть $2^{n-l}=mk+r$, где $0\leqslant r<k$, тогда $2^n=m(2^l k)+2^l r$, где $0\leqslant 2^l r<2^l k$, то есть остаток от деления 2^n на $2^l k$ равен $2^l r$, и так как $r\neq 0$, то этот остаток не меньше 2^l.

Отсюда следует, что во всяком случае

$S_n\geqslant 1\cdot$(количество не превосходящих n чисел вида $2k+1$, $k>1$) $+$
$+\,2\cdot$(количество не превосходящих n чисел вида $2(2k+1)$, $k>1$) $+$
$+\,2^2\cdot$(количество не превосходящих n чисел вида $2^2(2k+1)$, $k>1$) $+$
. . . .
$+\,2^l\cdot$ (количество не превосходящих чисел вида $2^l(2k+1)$, $k>1$). (*)

где l определяется условиями $3\cdot 2^l \leqslant n$, $3\cdot 2^{l+1} > n$ (нет смысла брать большее l, так как тогда выражение в скобке будет равно нулю).

Что можно сказать про правую часть этого неравенства?

Рассмотрим $(i+1)$-е слагаемое: $2^i(\ldots)$. Число, стоящее в скобке, равно, очевидно, числу не превосходящих n членов арифметической прогрессии $3\cdot 2^i$, $5\cdot 2^i$, $7\cdot 2^i$, ..., то есть прогрессии с первым членом $3\cdot 2^i$ и разностью $2\cdot 2^i$. Число таких членов не меньше $\frac{n-3\cdot 2^i}{2^{i+1}}$ и, значит, i-е слагаемое правой части неравенства не меньше $\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\cdot 2^i$. В основном, решение задачи на этом окончено. Все остальное — это различные преобразования правой части (*) с помощью полученных неравенств. Заменим, например, сумму в правой части (*) первыми восемью слагаемыми. Тогда мы получим

$$S_n > 8\cdot\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{7} 2^i >$$

$$> 8\cdot\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\cdot 2^8 = 3{,}5n+\left(\frac{n}{2}-384\right).$$

При $n>1000$ выражение в скобке положительно и, значит, мы доказали, что $S_n > 3{,}5n$ при $n>1000$. Тем самым задача М33 полностью решена.

Однако можно получить более точное неравенство. Просуммируем все члены правой части (*); получим:

$$S_n > (l+1)\frac{n}{2}-\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{l} 2^i >$$

$$> (l+1)\frac{n}{2}-\frac{3\cdot 2^{l+1}}{2}.$$

Воспользовавшись неравенствами $3\cdot 2^l \leqslant n$, $3\cdot 2^{l+1} > n$, найдем, что

$$S_n > \frac{n}{2}\log_2\frac{n}{3}-n =$$

$$= \frac{n}{2}\left(\log_2\frac{n}{3}-2\right) > \frac{n}{2}(\log_2 n-4).$$

Эта формула показывает, например, что если $n>2^{1004}$, то $S_n>500\,n$.

З а д а ч а. Сумма остатков от деления чисел 2^{l+1}, 2^{l+L} на нечетное число $m>1$ больше, чем $\frac{m}{2}\left(\frac{L}{\log_2 2m}-1\right)$.

С помощью этой задачи, решение которой будет приведено ниже, можно доказать, что для бесконечного числа значений n сумма S_n на самом деле гораздо больше, чем $\frac{n}{2}(\log_2 n-4)$, то есть можно доказать, что оценка $S_n > \frac{n}{2}(\log_2 n-4)$ очень груба (по крайней мере для бесконечного числа значений n). Это и неудивительно, так как наш метод доказательства не учитывал многих обстоятельств. Например, мы использовали только то, что остатки от деления 2^n на нечетные числа отличны от нуля, в то время как эти остатки часто бывают довольно большими. Вместе с тем, величина S_n с ростом n не может расти слишком быстро, так как очевидно, что $S_n \leqslant 1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$. Нам кажется вероятным, что справедлива такая гипотеза:

Г и п о т е з а 1. а) При достаточно больших n верно неравенство $S_n \leqslant \frac{n^2}{4}$;

б) существует положительное число $c>0$ такое, что $cn^2 \leqslant S_n$.

Мы не умеем ни доказывать, ни опровергать эти утверждения. Более того, мы не знаем, справедлива ли более слабая

Г и п о т е з а 2. Существует положительное число $c>0$ такое, что неравенство $cn^2 \leqslant S_n$ выполняется при бесконечном числе значений n.

Если вам удастся доказать или опровергнуть одну из этих гипотез, присылайте нам ваши рассуждения. Если они окажутся интересными, мы опубликуем их в одном из номеров журнала. В качестве слабого подтверждения гипотезы 2 может быть доказана следующая

Т е о р е м а. Для бесконечного числа значений n выполняется неравенство

$$S_n > \frac{n^2}{132\log_2 n}\,^{*)}.$$

Теорема выводится из задачи следующим образом. Рассмотрим сумму Σ_k остатков от деления чисел 2^{k+1}, ..., 2^n на число k. Согласно задаче, при нечетном k сумма Σk достаточно велика, поэтому и число $\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_n$ велико. Но, как легко за-

*) Число $\frac{n^2}{132\log_2 n}$ при больших n гораздо больше, чем число $\frac{n}{2}(\log_2 n-4)$. Нетрудно доказать, например, что при достаточно большом n отношение этих чисел больше $\sqrt{n}$.

метить, $S_1+S_2+\ldots+S_n^1=\Sigma_1+\ldots+\Sigma_n$, поэтому сумма, стоящая в левой части, также велика и, значит, одно из слагаемых, скажем S_l, также велико. Аккуратное проведение доказательства мы предоставляем читателю. Перейдем теперь к решению задачи.

Решение задачи. Выпишем остатки от деления чисел $2^{l+1}, \ldots, 2^{l+L}$ на m и будем ставить между двумя последовательными остатками «галочку», если первый больше второго. Тогда, во-первых, остаток, стоящий перед галочкой, больше $\frac{m}{2}$, во-вторых, количество чисел между двумя последовательными галочками меньше $\log_2 2m$, так как остатки между двумя галочками образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2 (действительно, $2^{\log_2 2m-1}=m>m-1$, а всякий остаток не больше $m-1$). Таким образом, число промежутков между галочками больше $\frac{L}{\log_2 2m}-1$ и так как в конце каждого промежутка стоит число, большее $\frac{m}{2}$, то все доказано.

А. Г. Кушниренко

В этом номере мы публикуем решения задач Ф43, Ф48—Ф51

Ф43

Найти давление в центре жидкой планеты радиуса R, если жидкость несжимаема и имеет плотность ρ.

Разобьем объем планеты на тонкие сферические слои толщиной Δr. Легко показать, что равнодействующая гравитационных сил, действующих со стороны слоя на частицу внутри этого слоя, равна нулю. Действительно, рассмотрим для этого конус с малым углом при вершине, в которую помещена частица массы m. Конус вырезает из слоя участки площадями s_1 и s_2 (рис. 1). Если масса вещества, приходящегося на единицу поверхности слоя, равна μ, то гравитационные силы, действующие на массу m со стороны участков s_1 и s_2, равны

$$F_1=\gamma\frac{m\mu s_1}{r_1^2}, \qquad F_2=\gamma\frac{m\mu s_2}{r_2^2};$$

но

$$\frac{s_1}{r_1^2}\cos\alpha_1=\frac{s_2}{r_2^2}\cos\alpha_2=\Omega$$

(Ω — телесный угол при вершине конуса), а $\alpha_1=\alpha_2$; заштрихованные треугольники подобны, то есть $\angle OA_1M_1=\angle OA_2M_2$, $\angle OA_1B_1=\angle OA_2B_2$ (они опираются на одну и ту же дугу) и $\alpha_1=\angle OA_1B_1-\angle OA_1M_1$, а $\alpha_2=\angle OA_2B_2-\angle OA_2M_2$. Поэтому $\frac{s_1}{r_1^2}=\frac{s_2}{r_2^2}$. Благодаря этому $F_1=F_2$, то есть эти силы взаимно уравновешивают друг друга. Проведя аналогичное рассмотрение для других участков слоя, мы и докажем сделанное утверждение.

Сила, с которой притягивается элемент слоя $\Delta s\Delta r$ к центру планеты, равна

$$F=\gamma\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho\Delta s\Delta r\rho}{r^2},$$

где r — расстояние от этого элемента до центра планеты. Отсюда найдем, что увеличение давления на участке толщиной Δs равно

$$\Delta p=\frac{F}{\Delta s}=\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2 r\Delta r.$$

Поэтому давление на расстоянии r_0 от центра планеты будет равно

$$p=p_0+\frac{4}{3}\pi\gamma\rho^2\Sigma r\Delta r.$$

Так как сумма $r\Delta r$ равна площади

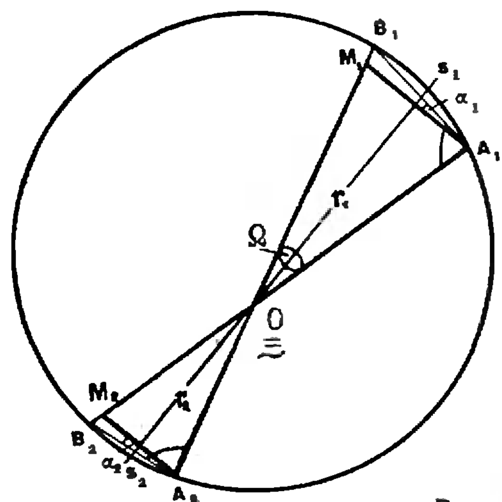


Рис. 1.

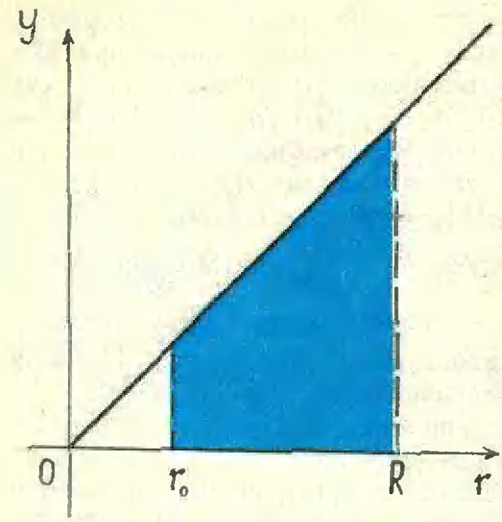


Рис. 2.

фигуры, ограниченной графиком $y=r$ и осью r (рис. 2), то

$$\sum r\Delta r = \frac{(R+r_0)(R-r_0)}{2} = \frac{R^2-r_0^2}{2}.$$

Поэтому

$$p = p_0 + \frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2(R^2-r_0^2);$$

p_0 — давление на поверхности планеты, которое можно принять равным нулю. Тогда

$$p = \frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2(R^2-r_0^2).$$

В центре планеты ($r_0=0$) давление будет равно

$$p_ц = \frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2R^2.$$

Ф48

На вал якоря динамомашины намотана веревка, к которой прикреплен груз. Опускаясь, груз вращает якорь. Когда якорь достаточно раскрутился, к клеммам динамомашины присоединили сопротивление нагрузки. Изобразите на графике зависимость скорости вращения якоря от времени с момента начала движения груза.

Так как до подключения нагрузки момент внешних сил, действующих на якорь, постоянен, то якорь вращается с постоянным угловым ускорением и его скорость увеличивается пропорционально времени.

После подключения нагрузки по обмотке якоря пойдет ток. Благодаря этому на якорь в магнитном поле статора будет действовать момент сил, пропорциональный (как и сила, действующая в магнитном поле на проводник с током) величине тока. Этот момент сил тормозит вращение якоря. Так как ток, идущий по обмотке якоря, пропорционален э.д.с. индукции, возникающей в обмотке, а э.д.с. индукции, в свою очередь, пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего обмотку, то есть угловой скорости вращения якоря, то при некоторой угловой скорости ω_0 момент силы, действующей на якорь со стороны груза, будет равен моменту тормозящей силы, действующей на якорь в магнитном поле. ω_0 и есть скорость установившегося вращения якоря.

График зависимости скорости вращения якоря от времени показан на рисунке 3: красной линией — для случая, когда скорость вращения якоря в момент подключения нагрузки была меньше ω_0, и синей — когда она была больше ω_0.

Ф49

U-образная трубка заполнена водой (рис. 4). Из одного колена воздух удален; давление воздуха в другом колене при температуре $T_0=20°$ С равно атмосферному. Оба конца трубки запаяны. Какой будет разность уровней воды в коленах, если трубку нагреть до $T=100°$ С?

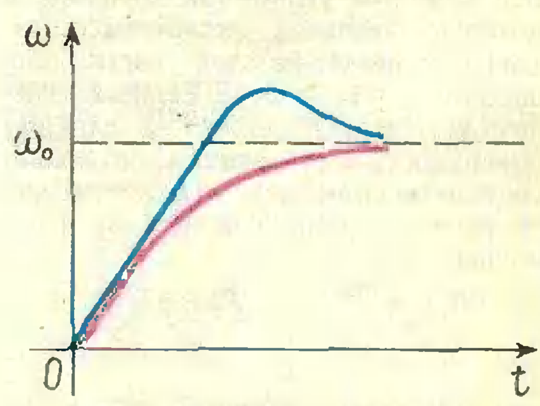


Рис. 3.

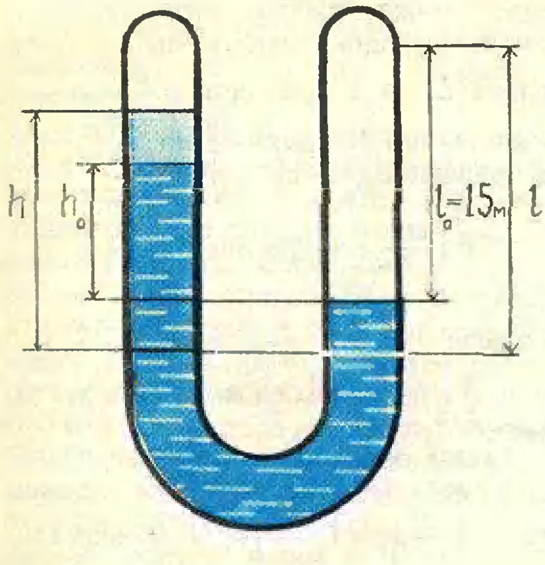


Рис. 4.

Давление в левом колене равно давлению насыщенного пара. В правом же колене находится как воздух, так и водяной пар, и давление равно сумме парциальных давлений воздуха и пара. Причем пар в правом сосуде тоже насыщен, и его парциальное давление равно давлению пара в левом колене. Поэтому, рассматривая равновесие воды, мы можем не учитывать давлений пара в левом и правом коленах.

Запишем условие равновесия воды в трубке при $T_0=20°$ С:

$$\rho g h_0 = P_0, \quad P_0 = 1 \ атм.$$

Отсюда

$$h_0 = \frac{P_0}{\rho g} \approx 10 \ м.$$

При 100° С давление воздуха в правом колене станет равным P, а разность уровней воды в коленах h. При этом

$$\rho g h = P. \qquad (*)$$

P связано с P_0 объединенным газовым законом:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{PV}{T},$$

и $l - l_0 = {}^1/_2 (h - h_0)$. Так как $V_0 = l_0 s$, $V = ls$ (s — площадь сечения трубки), то отсюда найдем

$$P = P_0 \frac{T}{T_0} \frac{l_0}{l} = P_0 \frac{T}{T_0} \frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}(h - h_0)}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (*), получим

$$h = \frac{P_0}{\rho g} \frac{T}{T_0} \frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}\Delta h},$$

или

$$h = h_0 \frac{T}{T_0} \frac{l_0}{l_0 + \frac{1}{2}\Delta h}.$$

Полагая, что ${}^1/_2 \Delta h \ll l_0$, получим

$$h = h_0 \frac{T}{T_0} \approx 13 \ м;$$

$\Delta h \approx 3$ *м*, ${}^1/_2 \Delta h \approx 1{,}5$ *м* $\ll l_0 = 15$ *м*. Это означает, что, пренебрегая ${}^1/_2 \Delta h$ по сравнению с l_0, мы получили результат, малоотличающийся от точного.

Ф50

На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика с массами m, соединенных пружинкой жесткости k и длины l_0 в нерастянутом состоянии. На левый кубик (*рис. 5*) внезапно начинает действовать постоянная по величине и направлению сила F. Найдите минимальное и максимальное расстояния между кубиками при дальнейшем движении системы.

Пусть расстояние l между кубиками минимально или максимально (будем говорить «экстремально»). Тогда оба кубика движутся с одинаковой скоростью v, и кинетическая энергия системы равна $2\frac{mv^2}{2} = mv^2$. В то же

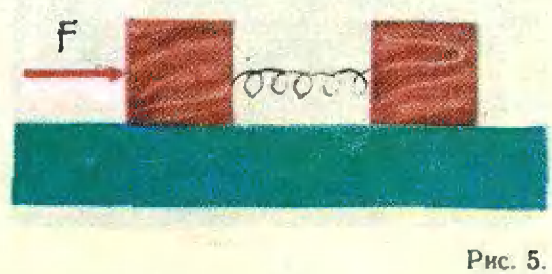


Рис. 5.

Заспорили ДВА ДРУГА

М. М. Лиман

В одном из скверов Краснодара имеется круглая цветочная клумба, расположенная в центре квадратного сквера $ABCD$ (рис. 1). Два друга —Вася и Петя — ходят в школу как раз через этот сквер. Причем иногда они выбирают путь AMC (красная линия), в другие дни — путь ADC (синяя линия). Васе кажется, что первый путь короче. Петя считает, что короче второй путь, и вот почему: круг, который им приходится обходить, имеет довольно большой радиус. «Конечно, — говорит Петя, — если бы радиус круга был невелик или если бы клумбы совсем не было, то путь по диагонали AC был бы явно короче ломаной линии ADC (рис. 2). Но размеры круга немалые, и если допустить, что круг был бы вписан в квадрат, то — рассуждает Петя — мы имели бы такую картину, как на рисунке 3». Теперь и Вася убедился, что синяя линия короче красной: по «синей» дороге надо идти все время «прямо», сделав только один поворот, по «красной» же дороге надо сделать несколько поворотов, а иногда даже как бы возвращаться назад.

Два друга решили рассеять свои сомнения таким образом: от точки A они пошли разными путями: Вася через сквер по красной линии, Петя — в обход — по синей линии. В точку C они прибыли почти одновременно. Спор остался нерешенным. Тогда они пошли обратно (каждый своей дорогой) к точке A. Теперь Петя пришел раньше Васи. И спор был решен окончательно в пользу Пети. Правда, Васе показалось, что Петя шел быстрее, чем Вася.

Дома Вася решил сделать математические вычисления, обозначив радиус круга через R, а сторону квадрата через a.

— Странно, — подумал Вася, — ответ на вопрос задачи не зависит от величины радиуса круга. Впрочем, — продолжал он свою мысль, — можно было обойтись и без вычислений: ведь всякая объемлющая линия, как известно, длиннее всякой объемлемой, имеющей те же концы.

Какие вычисления выполнил Вася и к какому результату он пришел?

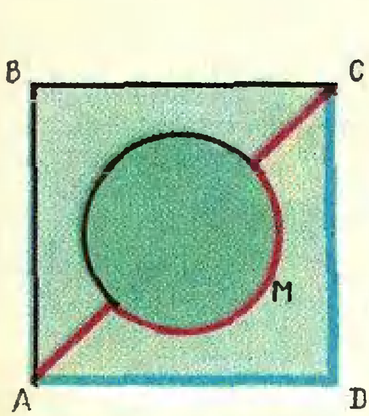


Рис. 1.

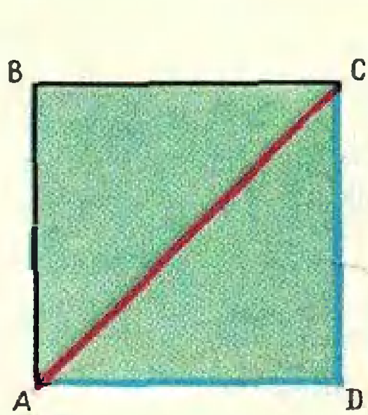


Рис. 2.

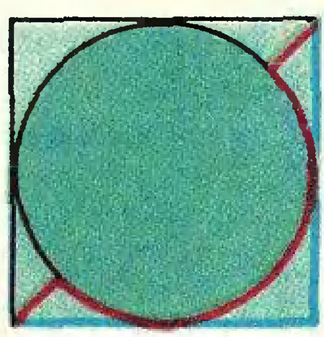


Рис. 3.

Заспорили два друга

М. М. Лиман

В одном из скверов Краснодара имеется круглая цветочная клумба, расположенная в центре квадратного сквера $ABCD$ (рис. 1). Два друга — Вася и Петя — ходят в школу как раз через этот сквер. Причем иногда они выбирают путь AMC (красная линия), в другие дни — путь ADC (синяя линия). Васе кажется, что первый путь короче. Петя считает, что короче второй путь, и вот почему: круг, который им приходится обходить, имеет довольно большой радиус. «Конечно, — говорит Петя, — если бы радиус круга был невелик или если бы клумбы совсем не было, то путь по диагонали AC был бы явно короче ломаной линии ADC (рис. 2). Но размеры круга немалые, и если допустить, что круг был бы вписан в квадрат, то — рассуждает Петя — мы имели бы такую картину, как на рисунке 3». Теперь и Вася убедился, что синяя линия короче красной: по «синей» дороге надо идти все время «прямо», сделав только один поворот, по «красной» же дороге надо сделать несколько поворотов, а иногда даже как бы возвращаться назад.

Два друга решили рассеять свои сомнения таким образом: от точки A они пошли разными путями: Вася через сквер по красной линии, Петя — в обход — по синей линии. В точку C они прибыли почти одновременно. Спор остался нерешенным. Тогда они пошли обратно (каждый своей дорогой) к точке A. Теперь Петя пришел раньше Васи. И спор был решен окончательно в пользу Пети. Правда, Васе показалось, что Петя шел быстрее, чем Вася.

Дома Вася решил сделать математические вычисления, обозначив радиус круга через R, а сторону квадрата через a.

— Странно, — подумал Вася, — ответ на вопрос задачи не зависит от величины радиуса круга. Впрочем, — продолжал он свою мысль, — можно было обойтись и без вычислений: ведь всякая объемлющая линия, как известно, длиннее всякой объемлемой, имеющей те же концы.

Какие вычисления выполнил Вася и к какому результату он пришел?

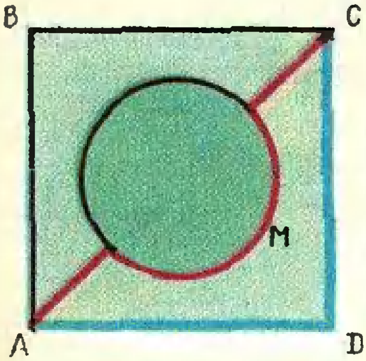


Рис. 1.

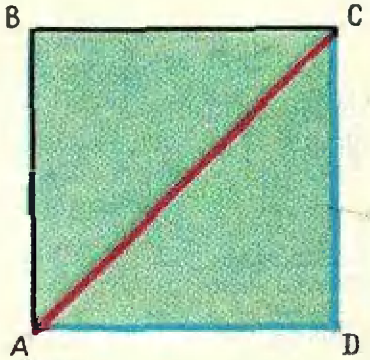


Рис. 2.

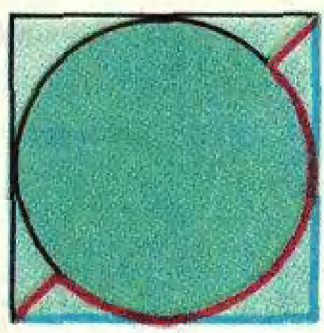


Рис. 3.

ЧТО ЗДЕСЬ—ТЕРЯЕМ ИЛИ НАХОДИМ?

В. А. Петров

Почти каждая письменная экзаменационная работа по математике включает в себя то или иное уравнение. Решая его, экзаменующийся должен не только безошибочно провести выкладки, необходимые для получения ответа, но и объяснить правомочность этих выкладок. Нужно уметь анализировать каждое из проделанных преобразований: приводит ли оно к равносильному уравнению, не угрожает ли потерей или приобретением решений.

Вопросы тактики «борьбы» с посторонними корнями и с потерей корней были рассмотрены в статье А. Г. Мордковича «Кто-то теряет, кто-то находит» («Квант» № 5, 1970)*). Теперь мы предлагаем вам проверить, достаточно ли твердо вы владеете этой тактикой. Сначала приводятся решения уравнений. Вам нужно проанализировать эти решения и ответить на следующие вопросы. Правильный ли получен ответ? Если нет, то что здесь — теряются корни или находятся посторонние? Почему? Каков правильный ответ? Сравните ваши соображения с нашими, помещенными на странице 62.

1. $2\sin 4x = \sqrt{2(1-\cos 4x)}$.

Решение. Воспользовавшись формулой

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha,$$

получаем

$$2\sin 4x = \sqrt{4\sin^2 2x}$$

или

$$\sin 4x = \sin 2x,$$

что уже очень легко решается.

Ответ: $x = n\pi$ и $x = \frac{\pi}{6} + n\frac{\pi}{3}$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

*) Более детально эта «тактика» освещена в очень полезной для абитуриентов книге Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова, Н. Х. Розова «Пособие по математике для поступающих в вузы», М., «Наука», 1970.

2. $8\cos x\cos 2x\cos 4x = 1$.

Решение. Умножив обе части уравнения на $\sin x$ и трижды воспользовавшись формулой синуса двойного угла, получим простое уравнение

$$\sin 8x = \sin x.$$

Ответ: $x = (2n+1)\frac{\pi}{9}$ и $x = 2n\frac{\pi}{7}$, где n — любое целое число.

3. $\sin\left(\frac{1}{5}\arccos x\right) = 1$.

Решение. Из данного уравнения находим

$$\arccos x = \frac{5\pi}{2} + 10n\pi$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда, по определению $\arccos x$, получаем $x = \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 10n\pi\right) = 0$.

Ответ: $x = 0$.

4. $\log_{x-1}(x^2-5x+7) = 1$.

Решение. Найдем ОДЗ:

$$x^2 - 5x + 7 > 0,\ x - 1 > 0,$$

откуда $x > 1$. Согласно определению логарифмической функции, имеем

$$x^2-5x+7 = x-1;\ x_1 = 2,\ x_2 = 4.$$

Так как оба значения входят в ОДЗ, то они и являются решениями исходного уравнения.

5. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб:

$$3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} \times$$
$$\times (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}) = 1.$$

Выражение в скобках представляет собой левую часть исходного уравнения — его можно заменить правой частью. После этого уравнение приводится к виду

$$(2x-1)(x-1) = (1-x)^3.$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

6. *Может ли уравнение*

$$\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c$$

иметь бесконечно много решений?

Решение. Перенесем $\sqrt{x}$ направо и возведем обе части в квадрат:

$$x + a\sqrt{x} + b = c^2 - 2c\sqrt{x} + x.$$

После приведения подобных членов получаем: $(a + 2c)\sqrt{x} = c^2 - b$. При $a + 2c = 0$ и $c^2 - b = 0$ (и только в этом случае), уравнение обращается в тождество, справедливое при всех неотрицательных x.

Ответ: уравнение имеет бесконечно много решений при $a = -2c$ и $b = c^2$. Решениями в этом случае являются $x \geqslant 0$.

7. $\left|\cos\frac{x}{2}\right|^{\sqrt{x^2+(7-\pi)x-7\pi}} = 1$.

Решение. Если при возведении в степень некоторого положительного числа получилась единица, то это означает, что либо само число равно 1, либо показатель степени равен нулю. Поэтому решениями данного уравнения будут те и только те x, при которых $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = 1$ или $x^2 + (7-\pi)x - 7\pi = 0$.

Ответ: $x = -7$, $x = \pi$ и $x = 2n\pi$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

8. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ 2x + 3y = 22. \end{cases}$

Решение. Выразив x из второго уравнения и подставив в первое, получим: $5y^2 - 132y + 448 = 0$; $y_1 = 4$, $y_2 = \frac{112}{5}$. Подставляя в первое уравнение $y = 4$, получаем $x = \pm5$, а при $y = \frac{112}{5}$ $x = \pm\frac{113}{5}$.

Ответ: $(4,\ 5)$; $(4,\ -5)$; $\left(\frac{112}{5},\ \frac{113}{5}\right)$; $\left(\frac{112}{5},\ -\frac{113}{5}\right)$.

9. $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = 1. \end{cases}$

Решение. Умножив первое уравнение на $-a$ и сложив уравнения, получаем $(1-a^2)x = 1 - a$. Умножив второе уравнение на $-a$ и сложив уравнения, получаем

$$(1-a^2)y = 1 - a.$$

Ответ: при $a = -1$ система не совместна, при $a = 1$ любая пара чисел (x, y) является решением и при $a \neq \pm1$ система имеет единственное решение $x = y = \frac{1}{a+1}$.

10. $\begin{cases} x^3 + y^3 = a, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2a. \end{cases}$

Решение. Разложим левые части уравнений на множители и поделим первое уравнение на второе:

$$\begin{cases} y(x+y)^2 = 2a, \\ y^2 - 3xy + 2x^2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

Ответ: $x_1 = y_1 = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ и $x_2 = \sqrt[3]{\frac{a}{9}}$, $y_2 = 2\sqrt[3]{\frac{a}{9}}$.

Вступительный письменный экзамен по математике на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1970 году

Ш. А. Алимов, Ф. П. Васильев, В. П. Моденов

В последние два десятилетия значение математических наук в общей системе человеческих знаний возросло неизмеримо. Главной причиной этого является развитие вычислительной математики. Создание электронных вычислительных машин произвело настоящую революцию не только в вычислительных возможностях и методах, но и в самом характере применения математики. Стало ясным, что качество и количество математических машин, их применение и системы управления ими являются неотъемлемой составной частью, определяющей научно-технический уровень страны.

В связи с этим возникла необходимость подготовки математиков новой специальности. В 1970 году в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова был открыт новый факультет — факультет вычислительной математики и кибернетики. В том же году был произведен первый прием на этот факультет.

На письменном экзамене по математике каждому поступавшему был предложен вариант из пяти задач, на решение которых отводилось 4 часа. Для получения удовлетворительной оценки нужно было решить более двух задач. Отличная оценка выставлялась за правильное решение всех пяти задач.

Разберем для примера типичный вариант, составленный из задач, предлагавшихся на письменном экзамене.

Вариант 0

1. Определить все действительные значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos^4 x-(a-2)\cos^2 x-3(a+1)=0$$

имеет решение, и найти все эти решения.

2. Решить уравнение

$$|1+\log_{\frac{1}{3}} x|=3+|2-\log_{\frac{1}{3}} x|.$$

3. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 240 *км* от A, со скоростью 40 *км/ч* выходит автобус. Одновременно с ним из B в A с постоянной скоростью v *км/ч* выезжает автомобиль. Через полчаса после встречи автомобиль, не доезжая до города A, поворачивает обратно и с прежней скоростью движется по направлению к B. Определить все те значения v, при которых автомобиль приходит в B раньше, чем автобус.

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна среднему арифметическому длин сторон AB и AC. Угол A равен α. Найти углы B и C, считая, что $B \geq C$. Исследовать, при каких значениях угла α задача имеет решение.

5. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между высотой SO и образующей равен φ. На плоскости основания вне конуса выбраны две точки A и B так, что прямые SA и SB взаимно перпендикулярны и образуют с высотой SO углы, соответственно равные α и β. Вычислить угол между образующими, по которым боковая поверхность конуса пересекает треугольники OSA и OSB.

1. Заметим, что $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$ при всех x. Тогда с помощью подстановки $\cos^2 x = t$ уравнение приводится к системе:

$$\begin{cases} t^2-(a-2)t-3(a+1)=0, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

которая имеет решение $t = a+1$ при $-1 \leqslant a \leqslant 0$. Следовательно,

$$\cos^2 x = a+1, \qquad (1)$$

где $-1 \leqslant a \leqslant 0$. Отсюда

$$x = \pm\arccos\sqrt{a+1} + \pi n$$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; -1 \leqslant a \leqslant 0)$.

Большинство поступавших с решением этой задачи справилось. Часть абитуриентов неверно решила уравнение (1), ошибочно полагая, что $\arccos(-\sqrt{a+1}) = \arccos\sqrt{a+1}$, и потеряла решения, соответствующие уравнению $\cos x = -\sqrt{a+1}$. Некоторые абитуриенты не указали всех значений a, при которых существуют решения задачи.

2. Область допустимых значений неизвестного: $x>0$. Перепишем уравнение в виде

$$|1+t| = 3+|2-t|, \qquad (1)$$

где $t = \log_{\frac{1}{3}} x$. Последовательно рассмотрим промежутки $t \leqslant -1$, $-1 < t < 2$, $t \geqslant 2$. При $t \geqslant 2$ имеем

$$1+t = 3+t-2, \qquad (2)$$

то есть уравнение (1) удовлетворяется тождественно при всех $t \geqslant 2$. Далее убеждаемся, что уравнение (1) при $t \leqslant -1$ и $-1<t<2$ не имеет решения. Таким образом, решением уравнения (1) являются все $t \geqslant 2$. Отсюда $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 2$, и с учетом области определения находим

$$0 < x \leqslant 1/9.$$

Некоторые абитуриенты, заметив тождество (2), писали, что уравнение удовлетворяется тождественно при всех t, не учитывая ограничения $t \geqslant 2$.

3. Пусть t (*ч*) — время движения автомобиля до первой встречи с автобусом. Так как автомобиль и автобус выехали одновременно, то справедливо равенство

$$40t + vt = 240. \qquad (1)$$

Автомобиль повернул обратно через $t + \frac{1}{2}$ (*ч*) после выхода из города B и, следовательно, вернулся в B через $2t+1$ (*ч*). Автобус после первой встречи прошел vt (*км*), затратив на этот путь $\frac{vt}{40}$ (*ч*). Таким образом, автобусу потребовалось на весь путь от A до B $t + \frac{vt}{40}$ (*ч*). Для того, чтобы автомобиль приехал в B раньше, чем автобус, должно выполняться неравенство

$$2t+1 < t + \frac{vt}{40}. \qquad (2)$$

По условию автомобиль повернул обратно, не доезжая до города A. Поскольку в момент первой встречи он находился от A на расстоянии $40t$ (*км*) и в течение получаса прошел путь $\frac{v}{2}$, то это условие приводит к неравенству

$$\frac{v}{2} < 40t. \qquad (3)$$

Объединяя (1), (2) и (3), мы приходим к системе:

$$\begin{cases} 40t + vt = 240, \\ 2t+1 < t + \frac{vt}{40}, \\ \frac{v}{2} < 40t. \end{cases}$$

Из уравнения (1) найдем $t = \frac{240}{v+40}$ и подставим в неравенства (2) и (3). Совместно решая получающиеся при этом неравенства относительно v, найдем $56<v<120$.

С составлением уравнения (1) и неравенства (2) справилось большинство абитуриентов, хотя некоторые из них заменяли знак $<$ в (2) на знак $\leqslant$. Основная доля ошибок была вызвана условием (3), так как многие абитуриенты не поняли необходимости этого требования и ограничились лишь решением системы, полученной из (1) и(2).

4. По условию

$$BC = \frac{AB + AC}{2}. \qquad (1)$$

С помощью теоремы синусов найдем

$$AB = BC\frac{\sin C}{\sin\alpha}, \quad AC = BC\frac{\sin B}{\sin\alpha}$$

и подставим в (1). Получим

$$\sin B + \sin C = 2\sin\alpha,$$

$$\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sin\alpha.$$

Так как

$$B + C = \pi - \alpha, \qquad (2)$$

то $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$, и

$$\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Поскольку по условию $B \geqslant C$ и, кроме того, $0 < C < \pi$, $0 < B < \pi$, то

$$0 \leqslant B - C < \pi. \qquad (4)$$

Замечая, что $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, из условий (2), (3), (4) для определения B и C имеем систему:

$$\begin{cases} B - C = 2\arccos\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right), \\ B + C = \pi - \alpha. \end{cases} \qquad (5)$$

Из (5) находим

$$\begin{cases} B = \frac{\pi-\alpha}{2} + \arccos\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right), \\ C = \frac{\pi-\alpha}{2} - \arccos\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right). \end{cases} \qquad (6)$$

Таким образом, для всех значений α, при которых существует треугольник ABC, удовлетворяющий всем условиям задачи, величины углов B и C вычисляются по формулам (6).

Исследуем, при каких значениях α задача имеет решение. Из (6) необходимо следует $\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right| \leqslant 1$. Так как $0 < \alpha < \pi$, то отсюда $0 < \sin\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ и, следовательно, $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$. При найденных значениях α величины $A = \alpha$, B и C, определяемые по формулам (6), положительны и в сумме равны π. Для доказательства этого достаточно проверить условие $C > 0$, ибо $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$ и, как следует из (6), $B \geqslant C$, $\alpha + B + C = \pi$.

Покажем, что $C > 0$ или, согласно (5),

$$\frac{\pi-\alpha}{2} > \arccos\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right). \qquad (7)$$

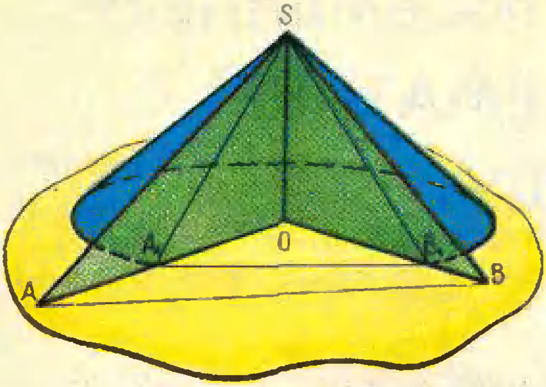
Так как $\cos x$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ монотонно убывает, а величины $\frac{\pi-\alpha}{2}$ и $\arccos\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ принадлежат этому отрезку, то, вычисляя косинус от обеих частей неравенства (7), имеем $\cos\frac{\pi-\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} < 2\sin\frac{\alpha}{2}$. При $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ это неравенство верно. Повторив наши рассуждения в обратном порядке, убеждаемся в справедливости неравенства $C > 0$.

Таким образом, треугольник ABC с углами $A = \alpha$, $B \geqslant C$ и удовлетворяющий условию (1) существует, причем углы B и C выражаются формулами (6), $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$.

Многие поступавшие, получив систему для определения B и C, не смогли ее решить, а некоторые выписали ответ в виде (6), но не исследовали, при каких значениях α задача имеет решение. Часть абитуриентов указали лишь случай равностороннего треугольника

$$\alpha = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

5. Пусть x — искомый угол между образующими SA_1 и SB_1, по которым боковая поверхность конуса пересекает треугольники OSA и OSB (см. рисунок): $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$, $\angle OSA = \alpha$,



$\angle OSB = \beta$, $\angle OSA_1 = \angle OSB_1 = \varphi$. Вычислим косинус угла A_1OB_1, являющегося линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями треугольников OSA и OSB. Для этого найдем $A_1B_1^2$ по теореме косинусов из треугольника A_1SB_1 и из треугольника A_1OB_1, а затем приравняем полученные выражения. Получим

$$A_1S^2+B_1S^2-2A_1S\cdot B_1S\cdot\cos x = A_1O^2+B_1O^2-2A_1O\cdot B_1O\times\cos\angle A_1OB_1.$$

Так как $A_1S^2 = SO^2+A_1O^2$, $B_1S^2 = SO^2+B_1O^2$, то отсюда следует

$$2A_1O\cdot B_1O\cdot\cos\angle A_1OB = 2A_1S\times B_1S\cdot\cos x - 2OS^2.$$

Подставим в это выражение $A_1O = B_1O = OS\cdot\operatorname{tg}\varphi$, $A_1S = B_1S = \dfrac{OS}{\cos\varphi}$ и после сокращения на $2OS^2$ получим

$$\operatorname{tg}^2\varphi\cdot\cos\angle A_1OB_1 = \frac{\cos x}{\cos^2\varphi} - 1 \text{ или}$$

$$\cos\angle A_1OB_1 = \frac{\cos x-\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}. \qquad (1)$$

Из треугольников ASB и AOB имеем

$$\cos\angle AOB = -\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta. \qquad (2)$$

Так как $\angle AOB = \angle A_1OB_1$, то, приравнивая правые части равенств (1) и (2), получим

$$\cos x = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta,$$

откуда окончательно:

$$x = \arccos(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta).$$

С этой задачей справились немногие поступавшие.

Заметим, что формулы (1) и (2) выражают зависимость между внутренним двугранным углом и плоскими углами при вершине трехгранного угла. В общем случае, если A, B и C — внутренние двугранные углы, противолежащие соответственно плоским углам α, β и γ трехгранного угла, то справедливы формулы:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\cos B = \frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$\cos C = \frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

которые выводятся так же, как и формула (1). Эти формулы могут оказаться полезными при решении многих стереометрических задач.

В заключение предлагаем самостоятельно решить следующий вариант, предлагавшийся на письменном экзамене.

Вариант 1

1. Определить все действительные значения a, при каждом из которых уравнение
$$\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0$$
имеет решения, и найти все эти решения.

2. Решить уравнение
$$|1-\log_{\frac{1}{6}} x| + 2 = |3-\log_{\frac{1}{6}} x|.$$

3. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 *км* от A, с постоянной скоростью v *км/ч* выходит автобус. Через 30 *мин* вслед за ним из A со скоростью 40 *км/ч* выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения v, при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B.

4. В треугольнике ABC сторона BC служит основанием полукруга, площадь которого равна площади треугольника ABC. Угол A равен α. Найти углы B и C, считая, что $B \geq C$. Исследовать, при каких значениях угла α задача имеет решение.

5. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания равен β. Вычислить угол между биссектрисами углов OSA и OSB, где точка O является центром круга, служащего основанием конуса.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ В МФТИ В 1970 ГОДУ

А. П. Савин, Б. В. Федосов

Задачи, предлагаемые на вступительном экзамене по математике в Московском физико-техническом институте, всегда привлекали внимание учителей и выпускников школ, поскольку уровень этих задач несколько выше, чем во многих технических вузах.

В 1970 году состав задач на письменном экзамене в МФТИ несколько изменился. Вместо четырех задач, предлагавшихся обычно, в 1970 году билет содержал пять задач (была добавлена одна легкая задача). Такой набор задач, видимо, сохранится и в дальнейшем.

С задачами приемных экзаменов МФТИ предыдущих лет можно познакомиться по сборнику «Задачи по элементарной математике»*), выдержавшему уже несколько изданий.

Хочется отметить, что трудность вступительного экзамена по математике в МФТИ часто преувеличивают. Тот факт, что после проведения всех экзаменов по математике и физике (устных и письменных) сохраняется конкурс в несколько человек на место, говорит сам за себя.

Чтобы вы смогли получить реальное представление о письменном экзамене по математике в 1970 году, подробно разберем один из вариантов.

Вариант 0

1. Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 *сек*. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 *сек*. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 5x - 2\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x \cdot \operatorname{tg}^2 3x.$$

3. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найти AC, если $BC=a$, $AB=b$ и $\frac{DE}{AC}=k$.

4. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены два сечения, каждое из которых параллельно ребрам AB и CD. Площадь части грани ABC, заключенной между секущими плоскостями, на s *см*^{2} больше площади части грани ACD, заключенной между этими же плоскостями. На сколько площадь одного сечения больше площади другого?

5. Найти действительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 4xy + y^2 + 2z^2 = -3, \\ 4xz + x^2 + 2z^2 = 1, \\ 8yz + y^2 + 2z^2 = 1. \end{cases}$$

Разбор задач

1. Обозначим через v_1 — скорость эскалатора, L — его длину и через v_2 — скорость пассажира. Тогда условия задачи запишутся в виде двух уравнений:

$$\frac{L}{v_1+v_2} = 24, \qquad (1)$$

$$\frac{L}{v_2} = 42. \qquad (2)$$

Преобразуем эти уравнения:

$$\frac{v_1}{L} + \frac{v_2}{L} = \frac{1}{24}, \quad \frac{v_2}{L} = \frac{1}{42}.$$

*) В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин. Задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1970.

Из двух последних уравнений сразу находим, что

$$\frac{v_1}{L} = \frac{1}{56},$$

а искомое время равно $\frac{L}{v_1}$, то есть 56 *сек*.

«Изюминка» задачи заключается в том, что из системы д в у х уравнений (1) и (2) с т р е м я неизвестными нужно найти лишь о т н о ш е н и е д в у х н е и з в е с т н ы х L и v_1. Те абитуриенты, которые пытались отыскать и L, и v_1, и v_2, естественно, не смогли этого сделать.

2. Преобразуем данное уравнение:

$$\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x\,(1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x), \quad (1)$$

$$\frac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 5x} = \operatorname{tg} 3x.$$

В последнем преобразовании мы разделили обе части уравнения (1) на $1 + \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 5x$. При этом мы можем потерять корни уравнения (1), являющиеся корнями уравнения $1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x = 0$. Преобразуя исходное уравнение дальше, получаем

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x,$$

откуда

$$3x = 2x + k\pi \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

или

$$x = k\pi \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Проверим, не потеряли ли мы корней при делении уравнения (1) на $1 + \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 5x$. Пусть x_1 — корень уравнения

$$1 + \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 5x = 0.$$

Тогда, подставив в исходное уравнение $\operatorname{tg} 5x_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 3x_1}$, получим

$$-\frac{1}{\operatorname{tg} 3x_1} - \operatorname{tg} 3x_1 = 0$$

или $\operatorname{tg}^2 3x_1 = -1$, что невозможно. Следовательно, корней потеряно не было.

О т в е т:

$x = k\pi \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$.

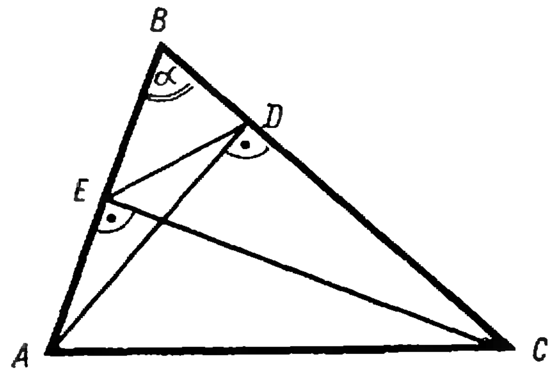


Рис. 1. $BC = a$, $BA = b$, $\frac{DE}{AC} = k$.

Те абитуриенты, которые пытались выражать $\operatorname{tg} 3x$ и $\operatorname{tg} 5x$ через $\operatorname{tg} x$ и решать полученное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, редко приходили к успеху из-за громоздкости выкладок и сложности полученного уравнения.

3. Обозначим $\angle ABC$ через α, тогда из прямоугольного треугольника ABD (рис. 1)

$$BD = AB \cos\alpha = b \cos\alpha,$$

а из прямоугольного треугольника BEC

$$BE = BC \cos\alpha = a \cos\alpha.$$

Из треугольника BDE по теореме косинусов находим длину отрезка ED:

$$ED^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\alpha - 2ab\cos^3\alpha. \quad (1)$$

Из треугольника ABC также по теореме косинусов находим длину отрезка AC:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \quad (2)$$

Теперь, используя данное в условии задачи соотношение $\frac{DE}{AC} = k$, из уравнений (1) и (2) получаем

$$\frac{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)\cos^2\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} = k^2.$$

Отсюда $\cos^2\alpha = k^2$. Решение $\cos\alpha = k$ соответствует случаю о с т р о г о угла α, а $\cos\alpha = -k$ — случаю т у п о г о угла α. Осталось подставить найденные значения в уравнение (2),

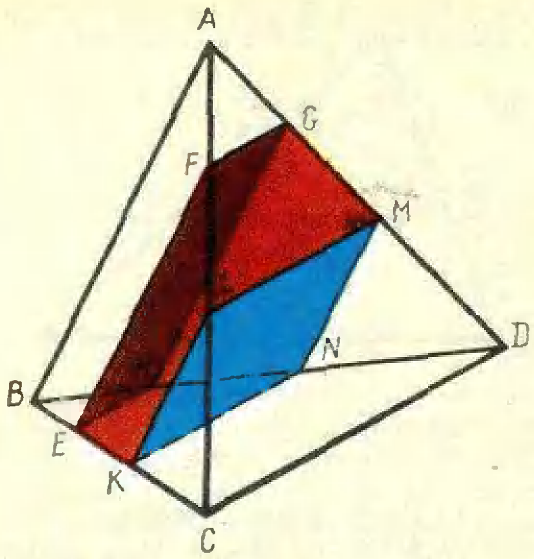


Рис. 2. $S_{EFLK} = S_{FGML} + s$.

чтобы получить оба ответа данной задачи:

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2abk}$$

или

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abk}.$$

В этой задаче основную трудность составляет удачный выбор неизвестного. Введение угла α в качестве дополнительного неизвестного дает короткое и изящное решение задачи. Если же пытаться использовать в этой роли другой элемент, например, величину отрезка DE, то получается гораздо более сложная система уравнений, решение которой часто оказывалось поступавшим не под силу.

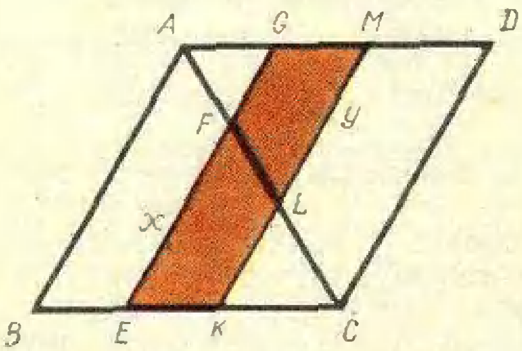


Рис. 3.

4. Рассмотрим многоугольники, получающиеся в сечении (рис. 2) тетраэдра указанными плоскостями. Нетрудно показать, что и четырехугольник $EFGH$ и четырехугольник $KLMN$ являются прямоугольниками. Развернем двугранный угол между плоскостями ABC и ACD на плоскость (рис. 3) и обозначим длину отрезка EF через x, а длину отрезка LM через y. Поскольку оба треугольника ABC и ACD — правильные, а стороны прямоугольников $EFGH$ и $KLMN$ соответственно параллельны ребрам AB и CD, то отрезок KL станет продолжением отрезка LM, а отрезок FG — продолжением отрезка EF. Если обозначить ребро тетраэдра через a, то очевидно, что $FG = a - x$, а $KL = a - y$. У трапеций $EFLK$ и $FGML$, как легко видеть, высоты равны. Найдем их. Высота h трапеции $EFLK$ равна разности высот правильных треугольников EFC и KLC, поэтому

$$h = x\frac{\sqrt{3}}{2} - (a - y)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y - a).$$

Найдем площади указанных трапеций. Площадь трапеции $EFLK$ равна

$$\frac{EF + LK}{2}h = \frac{x + a - y}{2}h,$$

а площадь трапеции $FGML$ равна

$$\frac{FG + ML}{2}h = \frac{a - x + y}{2}h.$$

Используя условие, что разность указанных площадей равна s, получаем

$$\frac{x + a - y}{2}h - \frac{a - x + y}{2}h = s$$

или

$$s = h(x - y);$$

подставив вместо h найденное для него выражение, получим

$$s = (x - y)(x + y - a)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вернемся к прямоугольникам $EFGH$ и $KLMN$. Их площади равны соответственно $x(a-x)$ и $y(a-y)$, а разность площадей

$$\sigma = y(a-y) - x(a-x) = (x-y)(x+y-a).$$

Сравнивая выражения для s и σ получаем, что $\sigma = 2s/\sqrt{3}$

В этой задаче выбор неизвестных довольно естествен. Наиболее трудной частью решения является переход от пространственного рисунка 2 к развертке двух смежных граней на плоскость (рис. 3); после этого задача уже решается без особого труда.

5. Сложим первое и третье уравнения с удвоенным вторым. Получим

$$2x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 4xy + 8xz + 8yz = 0$$

Сократив на 2, видим, что в левой части уравнения стоит полный квадрат выражения $x + y + 2z$, откуда

$$z = -\frac{1}{2}(x+y). \qquad (1)$$

Вычтем из второго уравнения данной системы третье уравнение, получим $x^2 + 4xz - y^2 - 8yz = 0$. Подставим в него найденное значение z (1)

$$x^2 - 2x(x+y) - y^2 + 4y(x+y) = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, уравнение приводится к виду $x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$. Выразим из него x через y:

$$x = y \pm 2y.$$

Итак, либо $x = -y$, либо $x = 3y$.

Рассмотрим первый случай $x = -y$. Из уравнения (1) получаем $z = 0$. А тогда из третьего уравнения исходной системы следует, что

$$y^2 = 1.$$

Отсюда находим два значения для y: $y = 1$ или $y = -1$.

Таким образом, в первом случае получаем два решения:

$$x_1 = -1,\ y_1 = 1,\ z_1 = 0,$$
$$x_2 = 1,\ y_2 = -1,\ z_2 = 0.$$

Рассмотрим второй случай: $x = 3y$ Из того же уравнения (1) следует, что $z = -2y$. Подставляя это значение для z в третье уравнение исходной системы, получаем, что $-7y^2 = 1$. Итак, во втором случае действительных решений нет.

Остается проверить, что найденные в первом случае решения удовлетворяют уравнениям начальной системы. Это оказывается верным. Таким образом, найдены два действительных решения данной системы.

Основная трудность этой задачи — преобразование уравнений данной системы к более простой системе. Те поступавшие, которые пытались «в лоб» решать эту задачу методом исключения неизвестных, наталкивались на непреодолимые трудности. Заметим, что данную систему можно привести к другим системам, отличающимся от разобранных нами, но также допускающим несложное решение.

По имеющимся у нас сведениям, практически все поступавшие решили по крайней мере одну задачу, подавляющее большинство (около 95%) — не меньше двух задач, более половины поступавших — не менее трех задач, треть — не менее четырех задач.

Приводим вариант для самостоятельного решения.

1. Решить уравнение $\dfrac{\lg(98 - x^3)}{\lg(2 - x)} = 3$

2. Найти высоту равнобедренной трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна S.

3. В $\Delta\ ABC$ внешний угол при вершине A в три раза больше $\angle B$, а стороны AB, BC, AC (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найти углы треугольника.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3xy - \dfrac{16}{xz} = -5, \\ xz + \dfrac{8}{yz} = 4, \\ yz - \dfrac{3}{xy} = 1 \end{cases}$$

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC. Каждый из плоских углов $\angle CSA$ и $\angle ASB$ равен 45°, а $\angle SAB = \operatorname{arctg} 2$. Через вершину C проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Найти двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью сечения. (Найти все решения.)

ЗАДАЧИ НА ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Ю. В. Зайчиков

Задачи подобного типа часто даются на приемных экзаменах в вузы и поступающему полезно познакомиться с некоторыми общими методами их решения.

Несколько слов о самих законах. Формулировать их можно по разному, и не в этом суть. Главное — понимать их физическое содержание. Вспомним самое основное.

Первый закон Ньютона утверждает, что тело не имеет ускорения (стоит на месте или движется прямолинейно и равномерно), если на него не действуют силы или их суммарное действие равно нулю. Иными словами, ускорение $\vec{a}=0$ и скорость $\vec{v}$ постоянна, если $\Sigma\vec{F}=0$.

Важен векторный смысл закона: именно векторная сумма сил должна равняться нулю (рис. 1), именно вектор скорости остается в этом случае постоянным: скорость неизменна по величине и направлению.

Если же равнодействующая всех приложенных к телу сил $\vec{R}=\Sigma\vec{F}$ отлична от нуля, то непременно возникает ускорение пропорциональное этой равнодействующей и обратно пропорциональное массе тела m.

$$\vec{a}=\frac{\Sigma\vec{F}}{m}$$

Это уже второй закон Ньютона. И опять-таки очень существен его векторный характер: векторное равенство $\vec{a}=\frac{\Sigma\vec{F}}{m}$ означает, что суммарное ускорение не только пропорционально равнодействующей сил приложенных к телу, но и совпадает с ней по направлению. Можно, конечно, считать и так: каждая сила вызывает свое, совпадающее с ней по направлению ускорение, а общее ускорение равно векторной сумме этих ускорений (рис. 2).

Следует помнить, что с силой по направлению совпадает ускорение, а не скорость, которая, вообще говоря, может быть направлена как угодно, в зависимости от того, как двигалось тело раньше. Так, например, при полете камня, брошенного под углом к горизонту, его скорость непрерывно изменяет свою величину и направление, тогда как вызывающая эти изме-

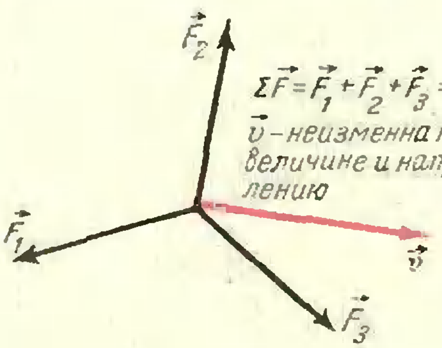


Рис. 1

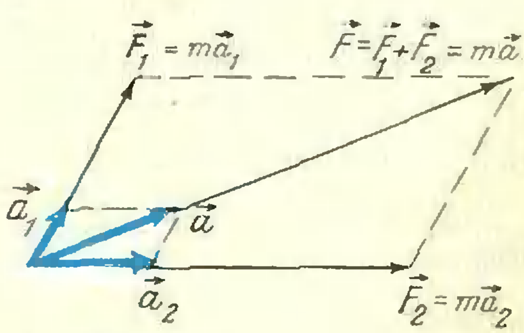


Рис. 2

нения сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ и ускорение свободного падения $\vec{g}$ практически неизменны (рис. 3).

Третий закон утверждает, что все силы в механике — это силы взаимодействия между телами, равные по величине, противоположные по направлению и приложенные к разным телам (рис. 4). Последнее иногда забывают, утверждая, например, что тело, стоящее на земле, уравновешено согласно третьему закону Ньютона действующими на него силами: силой тяжести $\vec{P}$ и силой реакции опоры $\vec{N}$ (рис. 5). На самом деле равенство этих сил никакого отношения к третьему закону Ньютона не имеет и, как мы скоро увидим, может вообще не выполняться.

Каждая из этих сил, однако, в соответствии с третьим законом Ньютона имеет свою «пару», равную по величине, противоположную по направлению и приложенную к другому телу, в нашем случае — к земле: сила реакции опоры $\vec{N}$ — силу давления тела на землю $\vec{N}'$, сила притяжения тела к земле $\vec{P}$ — силу $\vec{P}'$, притягивающую землю к телу (рис. 6).

Рассмотрим теперь, как же решать задачи.

Законы Ньютона обычно используют при расчете сил и ускорений. Для решения этих задач (как, впрочем, и любых других) нет универсальных рецептов, нужно лишь хорошо понимать применяемые законы, правильно разобраться в физической сущности процессов, о которых идет речь в задаче, и знать самые общие пути подхода к ее решению. Можно, например, предложить следующую, разумеется совсем не обязательную, последовательность действий:

первое — изобразить на схеме движущиеся тела и действующие на них силы;

второе — определить направление и характер движения (иногда это, правда, удается сделать лишь в конце);

третье — выбрать для каждого движущегося тела две оси (обычно по предполагаемому направлению движения и перпендикулярно к нему) и разложить по этим осям (спроектировать на них) действующие на тело силы;

четвертое — для каждого тела записать второй закон Ньютона, отдельно для каждой оси. При этом проекции сил и ускорений

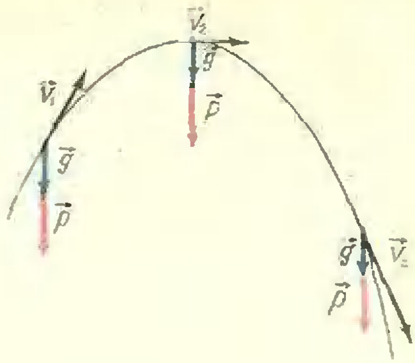


Рис. 3

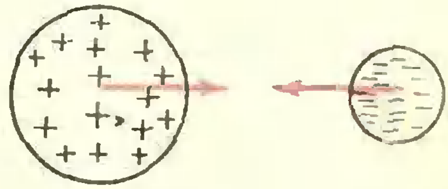


Рис. 4.

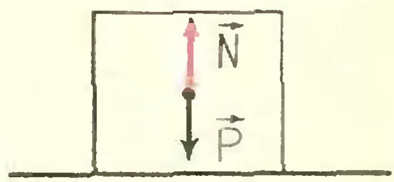


Рис. 5

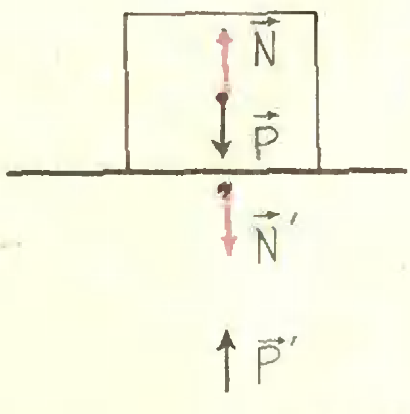


Рис. 6

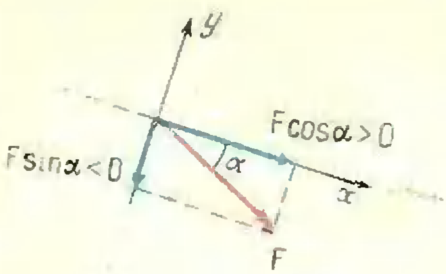


Рис 7

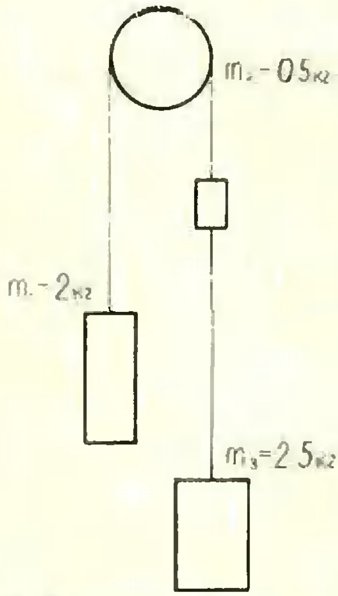


Рис 8

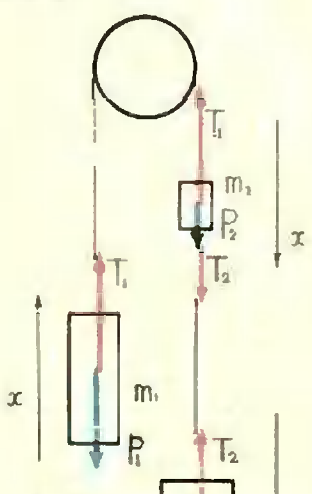


Рис 9

на оси считают положительными, если их направления совпадают с положительным направлением оси, и отрицательными, если они направлены противоположно (рис. 7);

пятое — решив составленные уравнения, найти неизвестные.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Найти натяжение нитей и ускорение грузов в системе, показанной на рисунке 8. Нить считать нерастяжимой, силы сопротивления, массу блока и нити не учитывать.

Рассмотрим прежде всего, какие силы действуют на каждый из грузов. Во-первых, это сила тяжести $P=mg$. Если принять

$g=10$ *м/сек*^{2}, то $P_1=20$ *н*, $P_2=5$*н*, $P_3=25$ *н*.

Во-вторых, на каждый из грузов действует сила натяжения нити: T_1 — на первый и второй грузы и T_2 — на второй и третий.

Заметим, кстати, что сила T_1 одинакова для первого и второго грузов только в том случае, когда массой блока и нити можно пренебречь. Если бы масса нити не была мала, то ускорение каждому участку нити сообщала бы разность сил натяжения нити. Поэтому силы натяжения нити, действующие на разные грузы, не могли бы быть одинаковыми.

Аналогично и для блока: привести его в движение можно, строго говоря, только в том случае, если с одной стороны нить будет тянуть сильнее, чем с другой.

Изобразив на схеме силы, действующие на грузы (рис. 9), попробуем определить направление и характер движения.

Правая часть системы тяжелее, поэтому грузы m_2 и m_3 станут опускаться, а груз m_1 — подниматься. Движение будет равноускоренным с одинаковым для всех грузов ускорением, ибо преобладание веса правой части при отсутствии сил сопротивления и нерастяжимости нити равносильно действию на систему в целом постоянной результирующей силы, что по второму закону Ньютона должно вызывать постоянное ускорение.

Мы можем оценить и относительную величину сил натяжения. Ясно, например, что $T_1>P_1$, ибо для первого груза ускорение, а значит, и результирующая сила должны быть направлены вверх. Аналогично $T_2<P_3$, а $P_2+T_2>T_1$ (рис. 9).

Выбор осей очевиден: для первого груза одну ось удобно направить вверх, для второго и третьего — вниз (по движению). Что касается второй (перпендикулярной) оси, то в этой

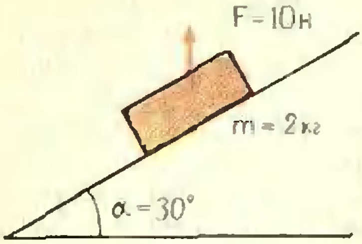


Рис. 10

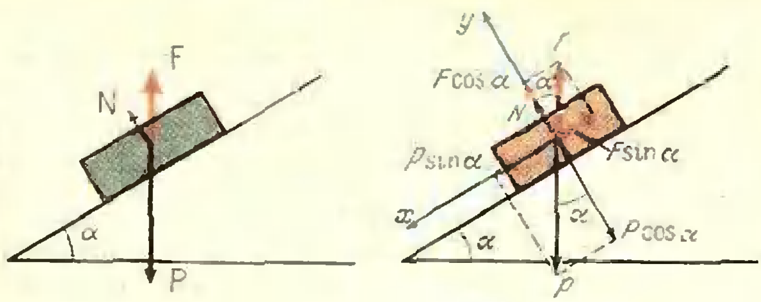


Рис. 11а,б

задаче она просто не нужна: ни одна из сил на нее не спроектируется — все они направлены либо вверх, либо вниз и поэтому проектируются целиком только на первую ось.

Теперь уже можно легко написать уравнения движения (уравнения второго закона Ньютона) для каждого из трех грузов:

$$T_1 - P_1 = m_1 a, \qquad (1)$$
$$P_2 + T_2 - T_1 = m_2 a, \qquad (2)$$
$$P_3 - T_2 = m_3 a. \qquad (3)$$

Мы получили три уравнения, из которых без труда можно найти три неизвестных (a, T_1 и T_2).

Подставив, например, T_1 и T_2 из (1) и (3) в (2), получим

$$a = \frac{P_2 + P_3 - P_1}{m_1 + m_2 + m_3} = 2\ м/сек^2.$$

Подставив этот результат в уравнения (1) и (3), найдем

$$T_1 = P_1 + m_1 a = 24\ н,$$
$$T_2 = P_3 - m_3 a = 20\ н.$$

Оси, разумеется, можно было бы направить и по-иному, например для первого груза не вверх, а вниз. Тогда вместо $T_1 - P_1 = m_1 a$ мы записали бы $P_1 - T_1 = -m_1 a$, что нисколько не повлияло бы на конечный результат.

2. Найти ускорение, давление тела на наклонную плоскость и силу трения (рис. 10). Коэффициент трения $k = 0{,}2$. Сила $F = 10$ *н* направлена вертикально вверх.

На тело действуют четыре силы: сила F — вверх, сила тяжести P — вниз, реакция опоры N — перпендикулярно к наклонной плоскости и сила трения $f_{тр}$, направление которой можно узнать, лишь определив направление движения тела. В подобных случаях обычно прикидывают, куда бы двигалось тело без трения под действием всех остальных сил, в нашем случае — под действием сил F, P и N (рис. 11*а*). Сила трения, очевидно, не в состоянии изменить направление движения, а может лишь уменьшить его скорость или даже полностью затормозить тело.

Можно предположить, что тело будет скользить вдоль наклонной плоскости вверх или вниз. Чтобы найти направление движения, выберем две оси: ось x направим вдоль наклонной плоскости, ось y — перпендикулярно к ней (рис. 11 *б*). Разложив по этим осям силы F, P и N *), уви-

---

*) Заметим кстати, что, разложив силу по осям, необходимо помнить, что она уже заменена другими, и поэтому ее можно либо перечеркнуть на рисунке, чтобы снова не рассматривать как действующую, либо составить новый рисунок с одними «разложенными» силами.

дим, что по плоскости тело может перемещаться только вниз, так как из двух действующих вдоль нее сил $P\sin\alpha$ больше $F\sin\alpha$. Сила трения, следовательно, может быть направлена только вверх по наклонной плоскости.

В нашем примере мы должны, правда, допустить еще одну возможность сила F может быть настолько велика, что тело вообще не будет скользить по плоскости, а оторвется от нее. Однако, сравнив «прижимающую» силу $P\cos\alpha=17{,}4$ *н* с силой $F\cos\alpha=8{,}7$ *н*, увидим, что первая больше второй, и поэтому тело не может оторваться от плоскости.

Надо сказать, что разность этих сил $P\cos\alpha-F\cos\alpha=8{,}7$*н* дает искомую силу давления тела на плоскость и равную ей по величине реакцию опоры N.

Напишем теперь второй закон Ньютона, помня о том, что силы, направленные противоположно положительному направлению оси, считаются отрицательными. Для оси y получим

$$F\cos\alpha+N-P\cos\alpha=0 \qquad (1)$$

(ускорения в этом направлении нет, поэтому и сумма сил равна нулю). А для оси x получим:

$$P\sin\alpha-F\sin\alpha-f_{\text{тр}}=ma. \qquad (2)$$

В задачах подобного типа иногда делают ошибки при определении величины силы трения. Привыкнув к задачам с горизонтально двигающимися телами, нередко, недолго думая, вычисляют силу трения как произведение коэффициента трения на вес тела.

На самом же деле $f_{\text{тр}}=k\cdot N$, где N — сила нормального давления (реакция опоры), то есть сила, действующая на тело перпендикулярно плоскости скольжения (или равная ей по величине и противоположная по направлению сила давления тела на плоскость).

В нашей задаче нужно учесть и угол наклона плоскости, и силу F, несколько уменьшающие силу нормального давления:

$$f_{\text{тр}}=k(P\cos\alpha-F\cos\alpha)=k(P-F)\cos\alpha=0{,}2(20-10)0{,}87=1{,}74 \text{ н}.$$

Теперь из уравнения (2) легко найти ускорение тела:

$$a=\frac{(P-F)\sin\alpha-f_{\text{тр}}}{m}=\frac{(20-10)\,0{,}5-1{,}74}{2}=1{,}63 \text{ м/сек}^2.$$

3. В ракете установлены пружинные весы, на которых лежит брусок. До вылета весы показывали 10 *н*. В полете весы вначале показывали 30 *н*, затем 10 *н*, 5 *н*, 0 *н*. Что можно сказать об ускорении и направлении движения ракеты в эти моменты времени?

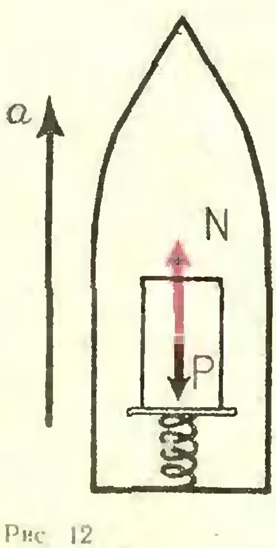


Рис. 12

Разберемся прежде всего в силах.

На брусок действуют две силы: сила тяжести P и реакция опоры N (рис. 12). Когда ракета не имеет вертикального ускорения (например, до вылета), эти силы равны. В нашем случае $P=N=10$ *н*.

Если ракета (а значит, и брусок) движется ускоренно, например, вверх, то равнодействующая этих сил тоже должна быть направлена вверх ($N>P$). Если ускорение направлено вниз, то $P>N$.

Что же показывают весы? Конечно, не силу тяжести, как иногда думают. Весы регистрируют силу, с которой на них давит брусок. Эта сила приложена к весам и в соответствии с третьим законом Ньютона равна по величине и противоположна по направлению реакции опоры N, приложенной к бруску.

Из условий задачи видно, что сила реакции опоры N и равная ей по величине сила давления на опору, или вес, заметно меняются в процессе полета и, вообще говоря, не равны силе тяжести $P=mg$, которую практически можно считать постоянной (если пренебречь ее изменением с высотой). Запишем второй закон Ньютона для движения вдоль оси, направленной, например, вверх:

$$N-P=ma$$

Подставив сюда $N_1=30$ *н*, $P=10$ *н*, $m=1$ *кг* $\left(m=\frac{P}{g}=\frac{10}{10}=1 \text{ кг}\right)$, получим: $a_1=\frac{N_1-P}{m}=\frac{30-10}{1}=20$ *м/сек²*. Ускорение положительно и направлено, следовательно, вверх.

При $N_2=10$ *н* получим $a_2=0$, при $N_3=5$ *н* $a_3=-5$ *м/сек²*, при $N_4=0$ $a_4=-g$. В последних двух случаях ускорение отрицательно, значит, оно направлено вниз, ибо в нашем уравнении мы считали N и a направленными одинаково (оба положительны).

Что касается направления движения, то тут следует предостеречь от поспешных выводов. Ошибочно, например, утверждать, что ракета двигалась вначале вверх ($a_1>0$), затем остановилась ($a_2=0$), стала двигаться ускоренно вниз ($a_3<0$) и, наконец, перешла в свободное падение ($a_4=-g$). На самом деле ракета могла двигаться и иначе, например все время вверх: ускоренно ($a_1>0$), с постоянной скоростью ($a_2=0$), замедленно ($a_{3,4}<0$). Ускорение, равное ускорению свободного падения, означает лишь, что равнодействующая всех действующих на ракету сил равна силе тяжести; двигаться же она при этом может и вверх — с выключенным двигателем, если не учитывать сил сопротивления, или при такой его работе, когда эти силы полностью уравновешиваются силой тяги. Все тела, находящиеся в ракете, в этом случае будут в состоянии невесомости, то есть их давление на опору и реакция последней будут равны нулю.

Все дело в том, что мы нашли лишь ускорение, а не скорость и не направление движения, о которых в условиях нашей задачи сказать, к сожалению, ничего нельзя.

4. Шарик массы m, висящий на нити длиной R, отводят в сторону до горизонтального положения и отпускают (рис. 13). Определить натяжение нити и ускорение шарика, когда нить окажется под углом α к горизонту. Найти закон изменения силы натяжения нити, скорости и ускорения шарика в зависимости от угла α. Силами сопротивления пренебречь.

Для решения воспользуемся тем же методом, что и раньше: расставим на рисунке силы, прикинем, какими могут быть направление и характер движения, выберем оси и, разложив по ним силы, запишем уравнение движения.

На шарик действуют две силы: сила тяжести P и сила натяжения нити T (рис. 14). Двигаться он будет, очевидно, по дуге радиуса R.

Одну из осей (x) направим по касательной к траектории, вторую (y) перпендикулярно к ней — по радиусу. Разложив по ним силы, увидим, что вдоль оси x действует сила $P\cos\alpha$, вдоль оси y — силы T и $P\sin\alpha$.

Сила $P\cos\alpha$ вызывает так называемое тангенциальное, или касательное, ускорение a_t, изменяющее скорость по величине.

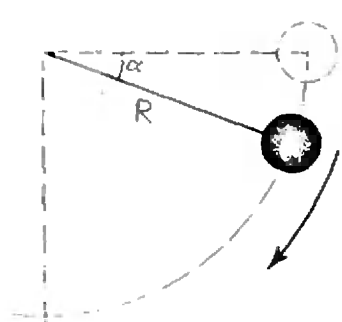


Рис 13

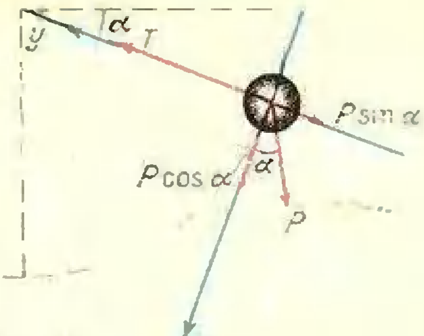


Рис 14

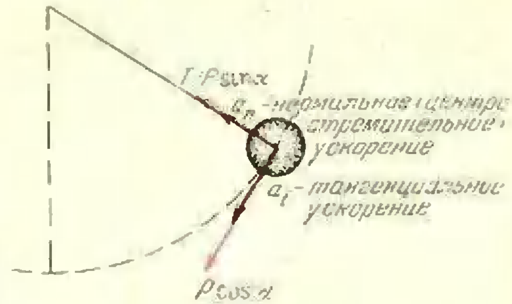


Рис 15

a_t является вектором, направленным как и $P\cos\alpha$ по касательной к траектории движения шарика (рис. 15).

Равнодействующая сил T, $P\sin\alpha$ сообщает шарику центростремительное (нормальное) ускорение, изменяющее скорость по направлению (рис. 16.).

Записав второй закон Ньютона, для движения вдоль осей x и y получим:

$$P\cos\alpha = ma_t, \tag{1}$$

$$T - P\sin\alpha = ma_n. \tag{2}$$

Из уравнения (1) сразу найдем тангенциальное ускорение a_t и закон его изменения:

$$a_t = \frac{P\cos\alpha}{m} = \frac{mg\cos\alpha}{m} = g\cos\alpha.$$

Центростремительное ускорение, возникающее при всяком криволинейном движении, так же является вектором. Оно всегда направлено внутрь кривизны траектории вдоль радиуса и вызывается алгебраической суммой радиальных проекций всех действующих на тело сил. Величина центростремительного ускорения, как известно, рассчитывается по формуле $a_n = v^2/R$. R известно, а скорость найдем, записав закон сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \tag{3}$$

где $h = R\sin\alpha$ (рис. 17). Отсюда $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gR\sin\alpha}$ и $a_n = 2gR\sin\alpha/R = 2g\sin\alpha$.

Скорость v и центростремительное ускорение a_n равны нулю в верхнем положении ($\sin\alpha = 0$) и максимальны в нижнем ($\alpha = 90^\circ$, $\sin\alpha = 1$).

Тангенциальное ускорение a_t, наоборот, имеет наибольшее значение в начале движения вверху ($\cos\alpha = 1$) и равно нулю, когда нить вертикальна

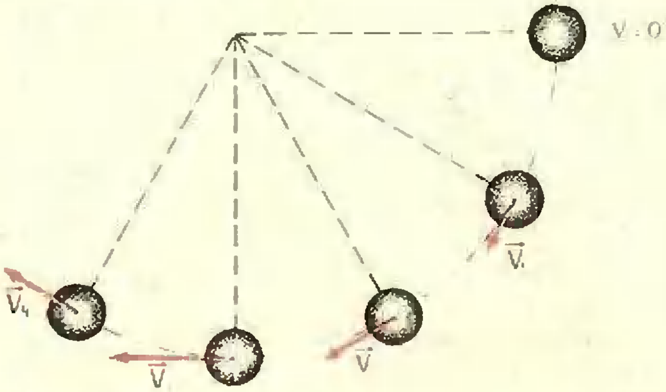


Рис 16

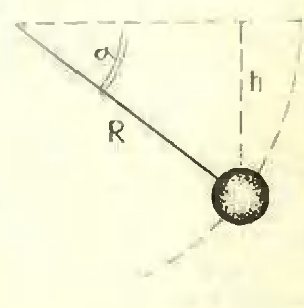


Рис 17

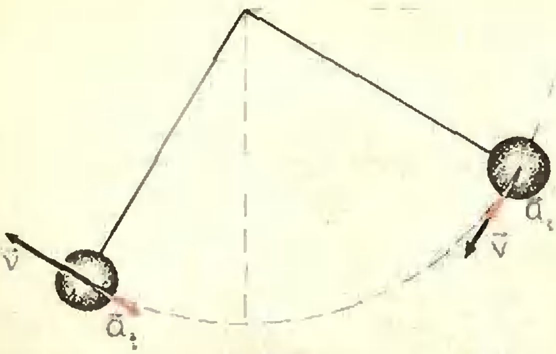


Рис. 18

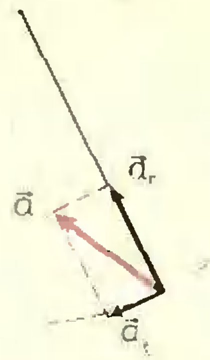


Рис. 19

($\cos\alpha = 0$). После прохождения шариком самой нижней точки траектории a_t становится отрицательным ($\cos\alpha < 0$). Оно направлено против скорости (рис. 18) и уменьшает ее (это, кстати сказать, ясно и из закона сохранения энергии — h в формуле (3) убывает).

Мы нашли величину скорости, тангенциального и центростремительного ускорений для произвольного угла α, а также закон их изменения в зависимости от изменения этого угла. Известны и их направления для любого момента времени ($\vec{a}_t$ и $\vec{v}$ — по касательной, $\vec{a}_n$ — по радиусу). Теперь можно определить еще полное ускорение, равное векторной сумме тангенциального и центростремительного ускорений ($\vec{a}_t + \vec{a}_n$) (рис. 19).

Силу натяжения нити и закон ее изменения в зависимости от угла не трудно найти из уравнения (2): $T = P\sin\alpha + ma_n$.

Подставив сюда вместо a_n найденное значение $2g\sin\alpha$, получим

$$T = P\sin\alpha + 2mg\sin\alpha, \text{ или } T = 3P\sin\alpha.$$

Натяжение нити максимально, когда шарик проходит нижнее положение ($\sin\alpha$ имеет наибольшее значение, равное 1).

Попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

1. Рассмотрите пример 2 для случая, когда сила F направлена не вверх, а под углом $\beta = 45°$ к наклонной плоскости (рис. 20) и равна: 15 *н*, 20 *н*, 30 *н* (расчет провести для всех трех случаев).

2. Продолжить решение примера 4, определив, как при движении шарика меняются направления равнодействующей сил, приложенных к шарику, и полного ускорения.

3. Найти натяжение нити, ускорение и силу трения груза m_2 о наклонную плоскость (рис. 21) при коэффициенте трения $k_1 = 0.1$ и при $k_2 = 0.2$. Нить считать нерастяжимой, массу блока и нити не учитывать.

4.* Решить задачу, аналогичную третьей, но со следующими изменениями: вместо груза m_2 — два груза $m_2 = 2$ *кг* и $m_3 = 5$ *кг*, связанные нитью (рис. 22); коэффициент трения для второго груза $k_2 = 0.1$, для третьего $k_3 = 0.05$. Дополнительно требуется определить натяжение нити между вторым и третьим грузами.

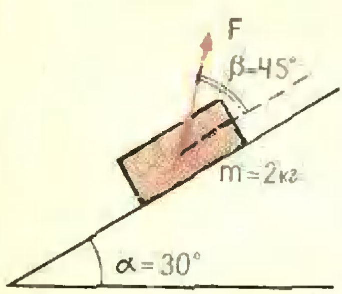


Рис. 20

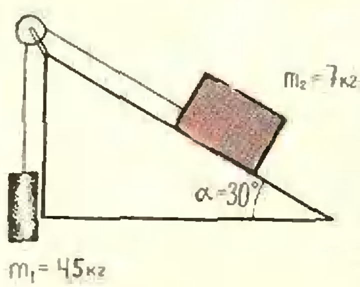


Рис. 21

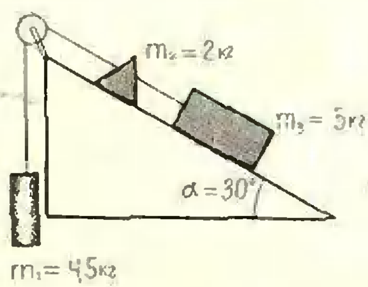


Рис. 22

Московский математический...

Математика нужна во всем. Она нужна в естественно научных исследованиях, инженерных расчетах, раз нообразных видах систем управления народным хозяйством.

Нужны математики, умеющие решать задачи, связанные с применением математических методов и вычислительной техники в разных областях науки и человеческой деятельности. Таких математиков называют специалистами по прикладной математике.

Быть специалистом по прикладной математике трудно, но интересно и увлекательно. Он должен знать, во-первых, что применять (общематематические науки), во-вторых, как применять (специальные математические науки), и, в-третьих, к чему применять (конкретные вопросы науки и человеческой деятельности).

Таких специалистов готовят в Московском математическом техникуме Министерства приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР *).

Московский математический техникум (ММТ) существует с 1967 года и дал уже два выпуска на базе 10-летней школы и один выпуск на базе 8-летней школы.

Срок обучения в ММТ для окончивших 8 классов средней школы — 2 года 10 месяцев, а для окончивших 10 классов — 1 год 10 месяцев. Выпускники получают квалификацию «вычислитель-математик» по специальности «Прикладная математика».

Они подготовлены для работы в вычислительных и научно-исследовательских центрах, отделах и лабораториях, в проектных и конструкторских бюро, на предприятиях

В своей работе вычислитель математик разрабатывает алгоритмы решения задач на электронно вычислительных машинах, создает и использует программы решения задач, реализует решение на машине и производит анализ полученного результата. Поэтому он должен обладать высокой математической культурой. Для этого учащиеся изучают в ММТ и общематематические дисциплины (алгебру, геометрию, математический анализ, линейную алгебру и аналитическую геометрию, математическую логику, теорию вероятностей), и специальные математические дисциплины (линейное и нелинейное программирование, вычислительную математику, программирование и алгоритмические языки, исследование операций, применение математических методов в естественно-научных исследованиях, в системах автоматизации и управления, в решении экономических задач). Поступившие после 8 класса получают также общее среднее образование.

Для того чтобы поступить в ММТ после окончания 8 или 10 классов, достаточно сдать устный экзамен по математике и письменный экзамен по литературе.

Каждый билет на экзамене по математике включает в себя как вопросы теоретического характера, так и несколько упражнений. При ответе на вопросы от поступающего требуется четкое и математически правильное изложение вопроса. При решении задач необходимо уметь аккуратно обосновывать каждый шаг решения, приводя все необходимые ссылки на соответствующие определения, аксиомы и теоремы.

*) Подготовку специалистов такой специальности начинают также в Ленинграде, Днепропетровске и в Ростове-на-Дону.

На экзамене также задаются дополнительные вопросы по теории и ее применениям в решении задач, содержание билетов и дополнительных вопросов не выходит за рамки школьной программы.

Приводим образцы вариантов экзаменационных билетов 1970 года

Вариант для окончивших 8 классов

1. Извлечение квадратного корня из произведения.

2. Синус, косинус и тангенс острого угла и их значения для угла $60°$.

3. а) Выполнить действия

$$\frac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230.04+46.75}{0.01}$$

б) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2=20-y^2, \\ x+y=6 \end{cases}$$

в) В равнобедренной трапеции основания равны k *см* и l *см*. Диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

Вариант для окончивших 10 классов

1. Показательная функция, ее свойства и график.

2. Признаки параллельности прямых и плоскостей.

3. а) Упростить:

$$\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}.$$

б) Решить неравенство:

$$\log_{2x-3}x>1.$$

в) Найти значение $M(x)$, если $M(x)=\operatorname{tg}6x+\sec 6x$, $\operatorname{tg}3x=2$ и $0<x<\frac{\pi}{6}$.

Остается лишь сообщить вам адрес ММТ: Москва, Е-43, Нижняя Первомайская, д. 14 (общежития при техникуме пока нет).

А. Г. Терушкин

К заметке «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 4, 1971 г., 3-я стр. обложки)

1. Заметим, что при каждом разломе мы увеличиваем число кусков на один. Общее число кусков равно $4\times 8=32$. До разламывания мы имели один кусок, после первого разламывания их оказалось два, после второго разламывания три, ..., после 31-го разламывания 32. Таким образом, в каком бы порядке мы ни ломали шоколадку, нам всегда придется ломать ее ровно 31 раз.

2. Шифр заключается в следующем: твердые гласные заменены на соответствующие им мягкие, а мягкие на твердые (*а* на *я*, *у* на *ю* и т. д.); аналогично, звонкие согласные заменены на глухие, а глухие на соответствующие им звонкие (*б* на *п*, *в* на *ф*, *г* на *к* и т. д.); кроме того, произведена перестановка шипящих и свистящих согласных (*щ*—*ч*, *х*—*ц*) и знаков *ъ*—*ь*.

Ответ:

Наша Таня громко плачет,
Уронила в речку мячик.
Тише, Танечка, не плачь,
Не утонет в речке мяч.

3. Требуемый способ изображен на рисунке 1.

4. 7 375 428 413:125 473=58 781.

5. Новое расположение спичек изображено на рисунке 2.

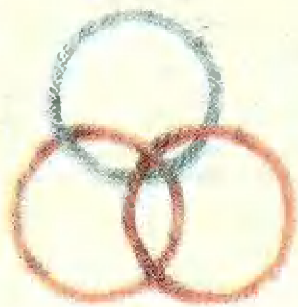


Рис. 1

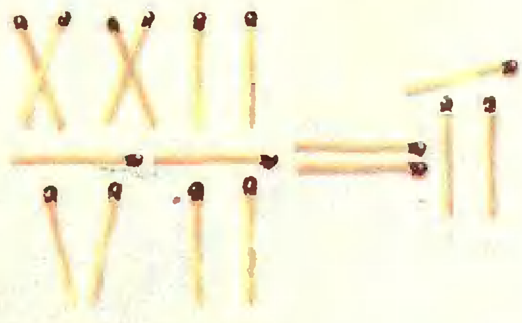


Рис. 2. $\pi=3.14\ldots\approx\frac{22}{7}$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Графики потенциальной энергии»

Задача 1

Как показано на рисунке 1, при $E < U_0$ возможно движение в двух областях AB и CD; если $E > U_0$, то область движения одна — NM.

Задача 2

При смещении тела вправо от положения равновесия (точка B на рисунке 13) тангенс угла наклона касательной к графику потенциальной энергии становится отрицательным, т. е. сила положительна и выводит тело из положения равновесия. Точка B называется точкой перегиба; тем самым мы доказали, что равновесие в точке перегиба неустойчиво. Положениями равновесия также являются точки A, C и участки (C, ∞) и $(-\infty, A)$. Точка C и весь участок (C, ∞) соответствуют безразличному равновесию. Если сдвинуть тело из любой точки на прямой потенциальной энергии (C, ∞), то оно остается в равновесии в новом положении. Аналогичная ситуация имеет место на участке $(-\infty, A)$, за исключением самой точки A. Равновесие в точке A является неустойчивым; чтобы в этом убедиться, достаточно чуть-чуть сместить тело вправо; тангенс угла наклона станет отрицательным, т. е. сила положительна, а значит, направлена от положения равновесия (санки скатываются из A вниз). График зависимости силы от координаты показан на рисунке 2.

Задача 3

Изменение потенциальной энергии на постоянную величину C графически соответствует смещению оси абсцисс вверх или вниз (в зависимости от знака C) относительно оси ординат. При этом, очевидно, угол наклона касательной к «новой» оси x совпадает с углом наклона к «старой» оси x. Так как сила равна по величине тангенсу этого угла, то и она при таком преобразовании потенциальной энергии остается неизменной.

Задача 4

На кубик, плавающий в жидкости, действуют две силы: сила тяжести и выталкивающая сила. До тех пор, пока глубина погружения кубика h удовлетворяет условию $0 \leqslant h \leqslant a$, суммарная сила равна $F = \rho_к a^3 g - \rho_ж a^2 h g$.

Положим $h = h_0 + x$, где $h_0 = a\dfrac{\rho_к}{\rho_ж}$.

Тогда $F = -\rho_ж a^2 g x$, если $-h_0 \leqslant x \leqslant a - h$. После того как кубик полностью погрузится в жидкость ($h > a$), независимо от глубины, на него действует постоянная сила $F = -(\rho_ж - \rho_к)a^3 g$; аналогично и на непогруженный в жидкость кубик действует постоянная по величине сила $F = \rho_к a^3 g$. В результате зависимость силы F от координаты x имеет вид, показанный на рисунке 3. Как и следовало ожидать, $x = 0$ — положение равновесия. Нетрудно непосредственным подсчетом площади убедиться, что

$$U(x) = \frac{\rho_ж a^2 g}{2} x^2, \text{ если } -h_0 \leqslant x \leqslant a - h_0,$$

$$U(x) = \frac{\rho_ж a^2 g}{2}(a - h_0)^2 + (\rho_ж - \rho_к) a^3 g x$$

при $x > a - h_0$, и

$$U(x) = \frac{\rho_ж a^2 g}{2} h_0^2 - \rho_к a^3 g x,$$

когда $x < -h_0$.

График потенциальной энергии показан на рисунке 4. Постоянную C мы выбрали так, что $U(0) = 0$. Видно, что $x = 0$ — положение устойчивого равновесия.

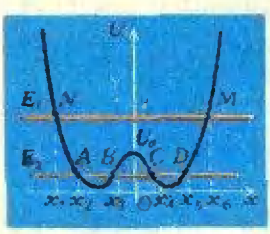


Рис. 1

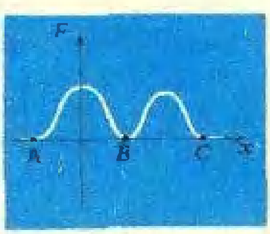


Рис. 2

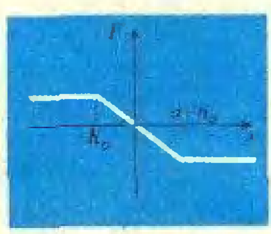


Рис. 3

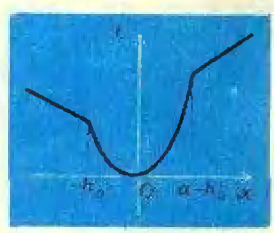
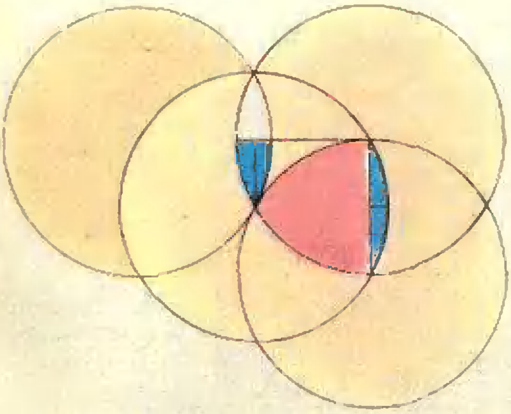


Рис. 4

К статье «Луночки Гиппократа»

Упражнение 1. Ответ ясен из рассмотрения рисунка.



Упражнение 2в. Рассмотрим треугольник BFC. Проводим дополнительные построения — отрезки BD, DC и FD (см. рис. 8 *в*, в статье).

Легко показать, что линии BF и DC параллельны. Вследствие этого площади треугольников BFC и BFD равны. Остается вычислить отношение площади круга, окружность которого проходит через точки B, F и D к площади треугольника BFD.

К статье «Физика помогает геометрии»

1. Поместить в вершины тетраэдра материальные точки одинаковой массы и искать центр тяжести полученной системы.

2. $AL:LB=1:2$. (Поместить в вершину A точку массы $2m$, в вершину B и в вершину C — точки массы m.)

3. Поместив в вершину A точку массы m, в вершину B — точку массы $4m$ и в вершину C — точку массы $2m$, докажем, что $B'L = {}^1/_7\ AL$ и, следовательно, площадь $BB'L$ равна ${}^1/_7$ от площади ABL, то есть ${}^1/_{21}$ от площади ABC. Повторив это рассуждение для двух других заштрихованных треугольников, найдем, что площадь трех заштрихованных треугольников составляет ${}^1/_7$ от площади треугольника ABC.

К заметке «Первое знакомство с номограммами»

1. Парабола $y=ax^2$ получается из параболы $y=x^2$ растяжением по оси Ox с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{a}}$. При этом прямые переходят в прямые, пересекающие ось ординат в той же самой точке (см. рис. 1). Поэтому отметки p можно поставить на той же высоте, что и раньше, то есть в точках с ординатами p^2 и абсциссами соответственно

$\pm p/\sqrt{a}$

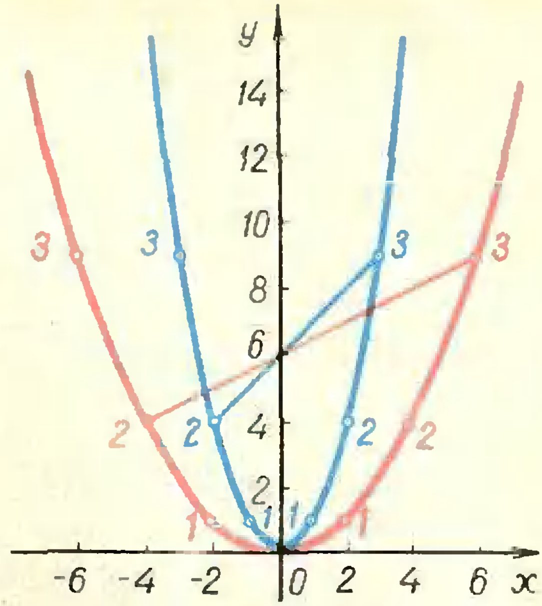


Рис. 1

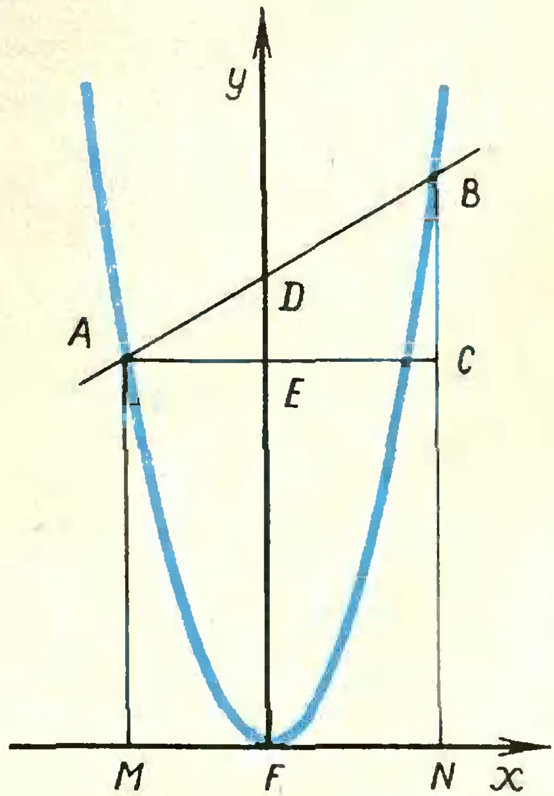


Рис. 2

2. Обоснование номограммы для параболы $y=x^2$.

Допустим, что мы хотим узнать, чему равно $m\times n$. Для этого мы соединяем точку A, координаты которой $(-m,\ m^2)$ (рис. 2), с точкой B, координаты которой $(n,\ n^2)$. Пусть для определенности $m<n$. Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось абсцисс и проведем через точку A прямую, параллельную этой оси. Ясно, что $EF=CN=m^2$, поэтому $BC=BN-CN=n^2-m^2$. Треугольники ADE и ABC подобны, а коэффициент подобия равен

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AE}{AE+EC}=\frac{m}{m+n}.$$

Следовательно,

$$DE=\frac{m}{m+n}BC=\frac{m}{m+n}(n^2-m^2)=$$
$$=m(n-m)=mn-m^2.$$

Отсюда

$$DF=DE+EF=(mn-m^2)+m^2=mn.$$

Случай $m>n$ рассматривается аналогично. Случай $m=n$ очевиден.

Аналитическое обоснование номограммы для параболы $y=ax^2$. Прямая, проходящая через точки $\left(-\frac{m}{\sqrt{a}},\ m^2\right)$ и $\left(\frac{n}{\sqrt{a}},\ n^2\right)$, задается уравнением (при $m+n\neq 0$)

$$y=m^2\frac{x-\frac{n}{\sqrt{a}}}{-\frac{m}{\sqrt{a}}-\frac{n}{\sqrt{a}}}+n^2\frac{x-\frac{-m}{\sqrt{a}}}{\frac{n}{\sqrt{a}}-\frac{-m}{\sqrt{a}}}.$$

Она пересекает ось ординат в точке

$$y=m^2\frac{\frac{-n}{\sqrt{a}}}{\frac{-m}{\sqrt{a}}-\frac{n}{\sqrt{a}}}+n^2\frac{-\frac{-m}{\sqrt{a}}}{\frac{n}{\sqrt{a}}-\frac{-m}{\sqrt{a}}}=$$
$$=\frac{m^2n+n^2m}{m+n}=mn$$

К статье «Что здесь — теряем или находим?»

1. Ответ содержит посторонние корни, например $x=5\pi/6$; некоторые решения потеряны, например $x=2\pi/3$. Все это — результат неправильного преобразования выражения $\sqrt{4\sin^2 2x}$. Согласно определению арифметического корня,

$$\sqrt{4\sin^2 2x}=2|\sin 2x|.$$

Правильный ответ: $x=n\pi/2$ и $x=\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}$.

2. Ответ содержит посторонние корни. Получились они в результате умножения обеих частей уравнения на функцию $\sin x$. Решениями уравнения $\sin 8x=\sin x$ являются, очевидно, и такие x, при которых $\sin x=0$, в то время как для исходного уравнения такие x решениями не являются (проверьте). Умножение на функцию может привести и к потере корней, так как это может привести к сужению ОДЗ (приведите пример!). В данном примере этого не происходит, так как функция $\sin x$ всюду определена.

Правильный ответ: $x=n\pi/9$, где n — любое нечетное число, не кратное 9, и $x=m\pi/7$, где m — любое четное число, не кратное 7.

3. Найденный корень — посторонний. Неправильно использовано определение $\arccos x$. Число m называется арккосинусом числа x, если $\cos m=x$ и число m удовлетворяет неравенству: $0\leq m\leq\pi$. В данном примере $m=5\pi/2+10k\pi$ и ни при каком k этому неравенству не удовлетворяет, а потому уравнение $\arccos x=5\pi/2+10k\pi$ как раз, согласно определению $\arccos x$, решений не имеет.

4. Неправильно найдена ОДЗ. Необходимо еще потребовать, чтобы основание логарифма $x-1$ было отлично от 1, и тогда $x=2$ не входит в ОДЗ *).

5. Корень $x=0$ — посторонний. Получен он в результате замены в преобразованном уравнении выражения, представляющего собой левую часть исходного уравнения, его правой частью. К потере корней такое преобразование привести не могло. Действительно, последнее уравнение в «решении» примера 5 является следствием исходного, если удовлетворяется исходное уравнение, то удовлетворяется и последнее. Обратное, как показывает этот пример, неверно.

6. Ответ неточный. В самом деле, пусть $c=-1$, $a=-2$, $c=2$, $b=c^2=1$. Тогда уравнение имеет вид

$$\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}+\sqrt{x}=-1$$

и, вопреки ответу, совсем решений не имеет (левая часть его при любом допустимом x положительна). Далее, пусть $c=1$, $a=-2$, $b=1$. Тогда уравнение имеет вид

$$\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}+\sqrt{x}=1,$$

и например, число $x=4$, опять же вопреки ответу, не является решением. Дело в том, что при решении «способом возведения в квадрат» получается уравнение, не равносильное данному, а являющееся его следствием. Полученный ответ необходимо проверить.

Проверка. Подставив найденные значения параметров в уравнение, получим

$$\sqrt{x-2c\sqrt{x}+c^2}=c-\sqrt{x}$$

или

$$\sqrt{(\sqrt{x}-c)^2}=c-\sqrt{x}.$$

Отсюда

$$|\sqrt{x}-c|=c-\sqrt{x}.$$

*) Заметим, что этот корень забыли исключить из ответа и авторы школьного учебника (Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова, Алгебра и элементарные функции, М., «Просвещение», 1969, часть 2, задача 1460,*в*).

Ясно, что при $c<0$ это уравнение вообще решений не имеет, а при $c=0$ имеет единственное решение. Пусть $c>0$. Рассмотрим такие значения неизвестного, которые удовлетворяют неравенству $0\leqslant x\leqslant c^2$. Тогда $\sqrt{x}\leqslant c$, $|\sqrt{x}-c|=c-\sqrt{x}$, и уравнение, очевидно, обращается в тождество. Так что в этом случае уравнение действительно имеет бесконечно много решений: $0\leqslant x\leqslant c^2$. Легко заметить, что никакие другие значения неизвестного ему не удовлетворяют.

П р а в и л ь н ы й о т в е т: уравнение имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $a=-2c$, $b=c^2$ и $c>0$ (и решениями являются числа $0\leqslant x\leqslant c^2$) *).

7. Ответ содержит посторонние корни. Дело в том, что хотя все решения уравнения $|f(x)|^{\varphi(x)}=1$ содержатся среди решений уравнений $|f(x)|=1$ и $\varphi(x)=0$, однако среди последних могут быть корни, посторонние для исходного уравнения. Ведь вполне возможно, что при $x=a$ $f(a)=1$, а $\varphi(x)$ не существует или $\varphi(a)=0$, а $f(x)$ не существует. Поэтому необходимо проверить, лежат ли найденные выше корни в ОДЗ.

П р о в е р к а. Так как показатель степени в уравнении принимает действительные значения лишь при $x\geqslant\pi$ и $x\leqslant-7$, то при $k=0$ и $k=-1$ числа $x=2k\pi$ не входят в ОДЗ. Не входит в ОДЗ и $x=\pi$, поскольку в этом случае и основание степени, и показатель обращаются в нуль. Все остальные из найденных решений входят в ОДЗ.

8. Ответ содержит посторонние решения. Получены они в результате неправильного использования метода подстановки. Найдя из второго уравнения, что $x=\varphi(y)$, и подставив вместо x в первое уравнение $\varphi(y)$, мы перешли от системы

$$\begin{cases} f(x,\ y)=0,\\ g(x,\ y)=0\end{cases}$$

к системе

$$\begin{cases} f[\varphi(y),\ y]=0,\\ f(x,\ y)=0,\end{cases}$$

вместо того, чтобы перейти к системе

$$\begin{cases} f[\varphi(y),\ y]=0,\\ x=\varphi(y)\end{cases}$$

(здесь $x=\varphi(y)$ — уравнение, равносильное уравнению $g(x,y)=0$). Другими словами, найдя y из первого преобразованного уравнения, мы находили x из первого же исходного уравнения, а следовало это делать из второго уравнения. Тогда бы мы получили правильный ответ: если $y=4$, то $x=5$, если

$$y=\frac{112}{5},\ \text{то}\ x=-\frac{113}{5}.$$

*) Условие задачи не требует такого полного ответа. Достаточно было бы найти какие-нибудь конкретные значения параметров, для которых получается положительный ответ, и сделать это совсем нетрудно. Однако такое полное решение является типичным (и хорошим!), поэтому мы его и привели.

9. Ответ неверен в случае $a=1$. Действительно, при $a=1$ система принимает вид

$$\begin{cases} x+y=1,\\ x+y=1,\end{cases}$$

и хотя имеет бесконечно много решений, все-таки не любая пара чисел ей удовлетворяет. Например, пара $x=3$, $y=4$ не является решением системы. Решениями этой системы будут пары чисел вида $x=t$, $y=1-t$, где t — любое действительное число.

Посторонние решения получились в результате неосторожного использования метода алгебраического сложения. Система

$$\begin{cases} f(x,\ y)=0,\\ g(x,\ y)=0\end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} a_1f(x,\ y)+b_1g(x,\ y)=0,\\ a_2f(x,\ y)+b_2g(x,\ y)=0,\end{cases}$$

если $a_1b_2\neq a_2b_1$ (докажите это). В противном случае, как показывает наш пример, возможно приобретение посторонних решений. Потери корней не будет (почему?).

10. Ответ верен для $a\neq0$. При $a=0$ уравнение имеет бесконечно много решений: они заполняют целую прямую $y=-x$. Потеря решений произошла за счет деления уравнений друг на друга.

К статье «Вступительный письменный экзамен по математике на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1970 году»

1. $-3\leqslant a\leqslant-2$,

$$x=\pm\arccos\sqrt{a+3}+k\pi,$$
$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,$$

2. $x\geqslant\dfrac{1}{6}$.

3. $30<v<33{,}6$

4. $$B=\frac{\pi-\alpha}{2}+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\right),$$

$$C=\frac{\pi-\alpha}{2}-\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\right);$$

$$0<\alpha\leqslant2\operatorname{arctg}\frac{2}{\pi}.$$

5. $$\arccos\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{2}}\right)$$

К статье «Вступительный письменный экзамен по математике в МФТИ в 1970 году»

1. $x = -3$. 2. $h = \sqrt{S}$

3. $\angle A = \pi - 3 \arccos 3/4$.

$B = \arccos 3/4, \angle C = 2 \arccos 3/4$

4. Четыре решения:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_1 = \sqrt{2}, \quad z_1 = 2\sqrt{2};$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \; y_2 = -\sqrt{2}, \; z_2 = -2\sqrt{2}$$

$x_3 = 2,\ y_3 = -1/2,\ z_3 = 4;\ x_4 = -2,$
$y_4 = 1/2,\ z_4 = -4.$

5. Два решения: $\operatorname{arctg} 2$ и $\arcsin \frac{2}{\sqrt{15}}$.

К статье «Задачи на законы Ньютона»

1. Во всех трех случаях проекция силы F на направление возможного движения $F\cos\beta$ больше $P\sin\alpha$, и, следовательно, тело может двигаться по плоскости только вверх.

В первом случае давление на плоскость $N = P\cos\alpha - F\sin\beta = 6{,}8$ *н*. Сила трения скольжения $f_{тр} = kN = 1{,}36$ *н* больше результирующей двух остальных сил, действующих вдоль плоскости, $R = F\cos\beta - P\sin\alpha = 0{,}6$ *н*, поэтому тело неподвижно, а сила трения покоя ($f_{тр.п}$) равна по величине и противоположна по направлению силе R.

Во втором случае давление на плоскость $N = 3{,}3$ *н* и $f_{тр} = 0{,}66$ *н*. Тело двигается с ускорением

$$a = \frac{F\cos\beta - P\sin\alpha - f_{тр}}{m} = 1{,}72 \text{ м/сек}^2$$

В третьем случае $F\sin\beta$ больше $P\cos\alpha$, тело оторвется от плоскости и начнет двигаться под углом 19° к ней с ускорением $a = 5{,}9$ *м/сек²* (во всех задачах мы принимаем $g = 10$ *м/сек²*).

2. Полное ускорение $\left(a_{полн} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\right)$ и равнодействующая сил T и P направлены под таким углом β к касательной к траектории, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{2g\sin\alpha}{g\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha$$

(в частности, в верхнем положении — по касательной, в нижнем — по радиусу).

3. В первом случае:

$$f_{тр} = kN = k_1 P_2 \cos\alpha = 6{,}1 \text{ н},$$

$$a = \frac{P_1 - P_2\sin\alpha - f_{тр}}{m_1 + m_2} = 0{,}34 \text{ м/сек}^2,$$

$$T = P_1 - m_1 a = 43{,}5 \text{ н}.$$

Во втором случае тело неподвижно. $T = 45$ *н*. Сила трения покоя $f_{тр.п} = T - P_2\sin\alpha = 10$ *н* (сила трения скольжения $f_{тр} = k_2 P_2 \cos\alpha = 12{,}2$ *н*.).

4. $f_{тр_2} = 1{,}74$ *н*, $f_{тр_3} = 2{,}17$ *н*, $a = 0{,}53$ *м/сек²*. Сила T_1 натяжения нити (между первым и вторым грузами) равна 42,6 *н*, а T_2 (между вторым и третьим грузами) равна 29,8 *н*

К заметке «Московский математический

Вариант для окончивших 8 классов

3. а) 10000.
б) $x_1 = 4,\ y_1 = 2;\ x_2 = 2,\ y_2 = 4.$
в) $(k + l)^2/4$

Вариант для окончивших 10 классов

3. а) $\frac{(x+y)^2}{4xy}$.
б) $2 < x < 3$.
в) $M(x) = -3$.

К задаче «К чему приводит нерешительность?»

(см. «Квант» № 4, стр. 7)

Нам потребуется лишь один факт из аналитической геометрии: если концы отрезка имеют координаты (a_1, b_1) и (a_2, b_2), то середина этого отрезка имеет координаты

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \quad \frac{b_1 + b_2}{2}\right).$$

Пусть Петя в точке (a, b) повернул к стадиону, затем в точке (c, d) — к дому Люси, в точке (e, f) — к магазину и в точке (a_1, b_1) — опять к стадиону. Найдем координаты всех этих точек, являющихся серединами отрезков, соединяющих последнюю точку поворота с соответствующей вершиной квадрата

$$c = \frac{a}{2}, \quad d = \frac{b+1}{2}, \quad e = \frac{a}{4},$$

$$f = \frac{b+1}{4};$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{4} + 1\right) = \frac{1}{8}(a + 4).$$

$$q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{b+1}{4} + 1\right) = \frac{1}{8}(b + 5)$$

Проверьте, что тогда

$$a_1 - \frac{4}{7} = \frac{1}{8}\left(a - \frac{4}{7}\right),$$

$$b_1 - \frac{5}{7} = \frac{1}{8}\left(b - \frac{5}{7}\right).$$

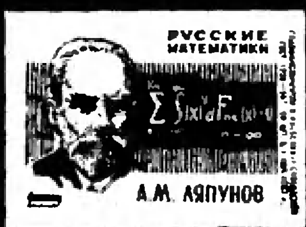
Таким образом, расстояния от точек поворота к стадиону до точки (4/7, 5/7) образуют геометрическую прогрессию и уменьшаются в 8 раз после каждого «обхода» по направлениям стадион — дом Люси — магазин. Значит, Петя приближается к треугольнику с координатами вершин

$$\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right), \quad \left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

Марки и спичечные этикетки, посвященные русским математикам

В 1946 году к 125-летнему юбилею со дня рождения великого русского математика и механика Пафнутия Львовича Чебышева по рисунку художника Е. Булановой была выпущена серия почтовых марок, состоящая из двух миниатюр. Одну из них мы приводим на рисунке.

Над портретом ученого помещена надпись «Великий русский математик», которая, однако, не отражает полностью роли П. Л. Чебышева в развитии отечественной науки. Кроме гениальных математических достижений П. Л. Чебышев оставил ряд выдающихся исследований и изобретений по механике, относящихся преимущественно к теории и практике шарнирно-рычажных механизмов, переводящих круговое движение в прямолинейное.



П. Л. Чебышев был основателем и вдохновителем Петербургской математической школы. Выдающимися ее представителями были академики А. М. Ляпунов, А. А. Марков, В. А. Стеклов. В 1967 году появилась серия спичечных этикеток с портретами знаменитых русских физиков и математиков, среди которых мы видим главу Петербургской математической школы и виднейших его учеников. А. М. Ляпунов был не только гениальным математиком, но и великим механиком. В 1967 году к 100-летию со дня его рождения также по рисунку Е. Булановой вышла марка с портретом ученого. Под ним изображена формула, дающая уравнение поверхности фигуры равновесия вращающейся жидкости. Кстати, исследования А. М. Ляпунова по фигурам равновесия вращающейся жидкости, частицы которой притягиваются по закону всемирного тяготения, были предприняты по инициативе его учителя П. Л. Чебышева.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор Т. М. Макарова
Корректоры Т. С. Вайсберг, В. П. Сорокина
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 27/I 1971 г.
Подпис. в печать 25/III 1971 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4.
Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,55
Тир. 287 380 экз. Т-03991.
Цена 30 коп. Заказ 167
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 5

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

Продолжается подписка на второе полугодие 1971 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен также учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», т. е. материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука», как появляются научные открытия.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.